רומינה זיגדון ואריה לב

על הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ועל הוראה בכלל

חשיבה ודיון בעקבות ספרו של רז קופרמן, *מתמטיקה של בית ספר יסודי – לגלות מחדש, להבין, ללמוד ולאהוב*, חלק ב, הוצאת מאגנס, תשע"ו 2015, 245 עמ'.

תקציר

בניגוד למחשבה המקובלת, המתמטיקה של בית הספר היסודי אינה סתם אוסף של פרוצדורות לביצוע חישובים. מאחורי אותה "מתמטיקה יסודית" עומדים רעיונות בעלי הרבה עומק ויופי, שאינם באים לידי ביטוי ראוי בספרי הדרכה למורים המשמשים כיום. ספרו של רז קופרמן, *מתמטיקה של בית ספר יסודי*, בא למלא את החלל הזה. הניסיון לעקוב אחר הסיבות לחסרונם של ספרים מסוג זה מציף מעל פני השטח את הבעיות המרכזיות הקיימות בהוראת המתמטיקה במקומותינו. מעבר להצגה של הספר עצמו, חלק משמעותי של המאמר דן בבעיות אלו, שלדעתנו משקפות בעיות טיפוסיות הקיימות בהוראה של כל תחומי הדעת, ממתמטיקה ומדעים מדויקים, ועד למדעי הרוח.

א. מבוא

מאמר זה נכתב בעקבות הופעת חלקו השני של הספר *מתמטיקה של בית הספר היסודי*, חלק ב, מאת רז קופרמן. כשמו כן הוא, הספר עוסק במתמטיקה של ביה"ס היסודי, כאשר חלק א עוסק במתמטיקה הנלמדת בכיתות א-ג וחלק ב במתמטיקה הנלמדת בכיתות ד-ו. במאמר זה נתייחס לשני חלקי הספר כאל מקשה אחת.

המחבר, שהוא פרופסור למתמטיקה באוניברסיטה העברית, מציין בהקדמה לספרו כי הספר החל את דרכו ברשימות שכתב להשתלמויות של מורים בבתי הספר היסודיים בירושלים. ועל כך הוא מוסיף:

> החלטתי לכתוב את הספר משום שאני מאמין בנחיצותו. רוב רובם של המבוגרים שולטים אמנם במתמטיקה של בית ספר יסודי ברמה הנדרשת מבוגרי בית ספר, אבל מיומנות זו אינה מספיקה כדי להנחיל ידע לאחרים. מחקרים רבים מוכיחים שהוראה איכותית דורשת ממורים רמת ידיעות עמוקה באופן ניכר מזו הנדרשת מתלמידיהם. בנוסף לידע רחב, נדרשים יכולת הבחנה בין עיקר וטפל, חשיבה ביקורתית ובדיקה עצמית, חופש להסביר דבר אחד במספר דרכים, זיהוי עקרונות משותפים בנושאים שונים, יכולת לבחור דוגמאות טובות, יכולת לזהות במהירות ובמדויק שגיאות של תלמידים והחשוב מכול בעיני – מודעות לכוח וליופי הטמונים בחומר הנלמד. יכולות מגוונות וחשובות אלו אינן באות יש מאין, ואחת הדרכים לרכוש אותן היא באמצעות ספרות ייעודית.

אנו מסכימים לכל הכתוב בפסקה זו. למיטב הבנתנו, הרוב המכריע של העוסקים בהוראה, מקברניטי משרד החינוך ועד אחרון הסטודנטים להוראה יסכים עם הכתוב. לפיכך מדוע לא יורמו גבותינו בפליאה כשנקרא את דברי המחבר בפסקה הקודמת לזו שצוטטה זה עתה:

> הופתעתי אז לגלות שכמעט לא קיימת ספרות מתמטית בעברית שתוכל לעזור למורים להעמיק את ידיעותיהם במתמטיקה יסודית ומעבר לזה תחשוף אותם להתבוננות אחרת, מעמיקה ורחבה יותר על תחום התוכן שהם מלמדים.

אכן מופלא. כולם מסכימים (גם אנשים וגם מחקרים) על חשיבותו של הנושא (הנושא של ידיעה מעמיקה של נושא הלימוד עצמו), ומאידך, מה שמתבצע בפועל אינו תואם לאותה הסכמה. מסתבר שאנו עומדים בפני נושא שלא הוטמע במערכת החינוך עקב חוסר הבנה לגבי מרכזיותו וחשיבותו. גם המורים עצמם אינם מודעים לחשיבותו. כך, למשל, מציינות עטרה שריקי ודורית פטקין (שריקי

ופטקין, 2014) במחקרן לגבי תפיסת המורים למתמטיקה את חייהם המקצועיים:

> ...הצורך של המורים להעמיק את הידע המתמטי שלהם נמצא משמעותי פחות, והצורך להעמיק את הידע המתמטי מעבר לידע הנדרש מהם כמורים, כמו גם הצורך להכיר תאוריות בתחום החינוך המתמטי דורגו במקומות האחרונים.

אנו נתקלים כאן בבעיה שקיימת בכל המערכות להכשרת המורים למתמטיקה; בכל הרמות, מבית הספר היסודי ועד להכנה לבגרות, לא ניתן הדגש הראוי להבנה המעמיקה של חומר הלימוד עצמו, דבר המשפיע על הוראת המקצוע, שהופכת להוראה שטחית המתרכזת בעיקר ביישום של פרוצדורות שונות ומשונות (במלה ״פרוצדורה״ אנו מתכוונים למין ״מתכון״ או סדרת הוראות שעל־ידי ביצוען ניתן להגיע לפתרון של בעיה. בבתי הספר שלנו, המשתמש בפרוצדורה לא נדרש בדרך כלל להבין את ההיגיון העומד מאחוריה).

לאור הנאמר לעיל, אנו מסיקים שחשוב לקיים דיון מתמשך ויסודי לגבי חשיבות ההעמקה של הידע המתמטי, בכל הרמות של המעשה החינוכי, ובמיוחד במסלולים להכשרת מורים. לפיכך מצאנו לנכון להקדיש חלק עיקרי של המאמר הנוכחי לדיון בנושא זה. דיון זה יתקיים בפרקים ג-ו של המאמר, לאחר הסקירה של הספר והדיון בתכניו שיובאו בפרק השני.

לדעתנו, הבעיות שבהן נדון במאמר זה אינן ייחודיות לבית הספר היסודי בלבד, ולפיכך נרחיב מדי פעם את הדיון גם ללימודי המתמטיקה בחטיבות הביניים ובבתי הספר התיכוניים. יתרה מזו, אנו משוכנעים כי גם העוסקים בתחומי הדעת האחרים, ממדעי הטבע ועד מדעי הרוח, יימצאו כי נושאים לא מעטים הנדונים במאמר רלוונטיים גם לנעשה בתחומי הדעת האחרים, ובכל רמות הלימוד. לפיכך בחרנו להציג את הדברים באופן שיתאים גם לקוראים שאינם מתמצאים בתחום המתמטיקה, ולהרבות בדוגמאות שיעזרו להמחיש את מצב העניינים.

ב. סקירה על תוכן הספר

ספרי המתמטיקה, המשמשים את המורים בבתי הספר היסודיים במקומותינו, הם בדרך כלל ספרים העוסקים בהדרכת המורים לגבי הדרך שבה יועבר חומר הלימוד לתלמידים, ולגבי השימוש בחוברות הלימוד ובספרי הלימוד, והם בדרך כלל חוברות למורה שמצורפות לחוברת שממנה לומדים התלמידים. קיימת אמנם מודעות במערכת החינוך לצורך העמקת הידע של המורים מעבר לחומר הלימוד עצמו. אולם בנושא זה מוחמצת פעמים רבות המטרה משני כיוונים. מצד אחד, אין הכרה בעובדה כי חומר הלימוד עצמו, גם של בית ספר יסודי, הוא עמוק ודורש השקעה משמעותית בלימוד והכשרה, ולפיכך, מצד שני, ניגשים לא אחת מיד, ללימוד של "חומר מתקדם", אותו מתקשים פרחי ההוראה להטמיע. הנזק בגישה זו הוא כפול: ראשית, המורים אינם שולטים כראוי בחומר אותו הם מלמדים, ומצד שני, עקב הקושי להטמיע את אותו חומר "מתקדם", הם פונים, בצר להם, לשימוש בפרוצדורות לפתרון בעיות שונות, בלי להבין את היסודות העומדים מאחורי אותן הפרוצדורות. מכאן לא קשה לנחש מה תהיה ההשפעה של אופן לימוד כזה על דרך הוראתו של המורה.

הספר *מתמטיקה של בית הספר היסודי* מיוחד בכך שאינו מלמד איזושהי מתמטיקה ב"רמה גבוהה", אלא בכך שהוא מלמד את החומר שנלמד בבית הספר, אך מתוך גישה יסודית ומעמיקה, לימוד שהוא חשוב וראוי בכל הכשרה של מורים. על כך כותב המחבר:

> חשוב לי להדגיש ש*מתמטיקה של בית הספר היסודי* הוא ספר מתמטיקה ואינו ספר המלמד כיצד ללמד מתמטיקה. אין לראות בו 'מדריך למורה', כדוגמת המדריכים הנלווים לספרי התלמיד.

קיימים שני ספרים נוספים בעברית, שהם מצוינים לדעתנו: *חשבון להורים*, מאת רון אהרוני (אהרוני, 2006), ו*שליש לחלק לרבע* מאת מירה עופרן (עופרן, 2005), שנכתבו מתוך מטרה דומה: להציג למבוגרים את העומק והיופי שעומדים מאחורי החשבון של בית הספר היסודי. ספרים אלו נועדו להורים, מורים ומבוגרים אחרים. ספרו של רז קופרמן נבדל מהם בכך שהוא נכתב במטרה מוצהרת לשמש ללימוד המורים, ולפיכך ערוך באופן שדומה יותר לספר

לימוד אקדמי במתמטיקה. בנבדל מספרים אלו, מתרכז המחבר יותר בלימוד המתמטיקה של בית הספר היסודי עצמה, ופחות בנושא של הוראת המתמטיקה לילדים.

מטרתו העיקרית של פרק זה היא להציג את תוכן הספר באופן שיוכל להיות מובן לכל מי שמתעניין בהוראת תחומי הדעת השונים, גם אם אינו מתעניין או מבין במתמטיקה. מטרתה של סקירה זו אינה להציג באופן סדור את תוכן הספר, אלא לעמוד בעיקר על רוח הדברים והעקרונות העומדים מאחורי כתיבתו. אנו מקווים כי דיון זה יבהיר גם את המיוחד והשונה בספר, ובכך גם ישפוך אור על כמה בעיות יסודיות הקיימות בלימודי המתמטיקה. דיון רחב יותר על בעיות אלו יתבצע בפרקים הבאים.

במיוחד, נדגיש בהצגה להלן את הפרטים המייחדים את הספר, כגון השימוש בשפה מדויקת ובהירה, ההקפדה על הניסוח הפורמלי, מתן הסבר אינטואיטיבי והצגת המוטיבציה לנושאים שונים, אך ללא ויתור על התיאור המדויק והחד משמעי, הצגת כיווני מבט שונים על אותה הבעיה, שילוב של דיון בנסיבות היסטוריות וכדומה. דרך ההצגה של חומר הלימוד בספר מעודדת חשיבה עצמאית וגמישות מחשבתית.

נפתח בנושא החשוב של השימוש בשפה מדויקת ובהירה, וההקפדה על הניסוח הפורמלי. למרבה הצער, נראה כי נושא חשוב זה אינו זוכה להכרה הראויה בהכשרת המורים, כמו גם בלימודי המתמטיקה בבית הספר בכל רמות הלימוד (ראו דיון מפורט יותר על חשיבות הנושא, ועל הסיבות לאי ההכרה הראויה בחשיבותו, בפרק ד להלן).

הבה נביט בהגדרה של מספר זוגי ומספר אי זוגי המובאת בעמוד 65 של חלק א:

> **הגדרה א:** מספר זוגי הוא מספר שלם שאפשר להציגו כסכום של שני מספרים שלמים שווים. מספר שלם שאי אפשר להציגו כסכום של שני מספרים שלמים שווים נקרא מספר אי זוגי.

ללא הגדרה מדויקת לא נוכל להיות בטוחים שהאדם שעומד מולנו מסכים עם התפיסה שלנו של המושג. יתר על כן, אי שימוש בהגדרה עלול להביא למצב בו שני אנשים ישתמשו באותו המושג לדברים

שונים. יתירה מזו, כאשר יש לנו הגדרה מדויקת אנו יודעים בוודאות מה עלינו לעשות על מנת לבדוק (להוכיח) שמספר הוא זוגי או אי זוגי. ידיעה והבנה של ההגדרה תהווה בסיס להסברים והוכחות הקשורים לתכונות של המושג המוגדר.

כעת מציג המחבר הגדרה נוספת למספר זוגי ומספר אי זוגי.

> **הגדרה ב:** מספר זוגי הוא מספר שלם שאפשר להציגו ככפולה שלמה של 2. מספר שאי אפשר להציגו ככפולה שלמה של 2 נקרא מספר אי זוגי.

לכאורה, הצגת ההגדרה הנוספת עומדת בסתירה לאמירת המחבר כי "מושג מתמטי חייב בהגדרה יחידה וחד משמעית". לפיכך הוא שואל: "האם לא ייתכן שמספר יהיה זוגי לפי הגדרה אחת ואי זוגי לפי ההגדרה האחרת?". כמענה לתהייה זו מציג המחבר את המושג של הגדרות שקולות (ההגדרות א, ב הן שקולות אם בכל פעם שמתקיימת אחת מהן, אז בהכרח מתקיימת גם השנייה), ואת הטענה הבאה בדבר שקילות ההגדרות א ו־ב.

טענה

> חלק 1: אם מספר טבעי הוא זוגי לפי הגדרה א, אזי הוא יהיה זוגי גם לפי הגדרה ב.
>
> חלק 2: אם מספר טבעי הוא זוגי לפי הגדרה ב, אזי הוא יהיה זוגי גם לפי הגדרה א.

המחבר גם נותן את הנימוק לגבי שקילות ההגדרות כי לטענתו "כל דבר שנלמד רצוי שילווה בהסבר".

המחבר גם מסביר ש"הגדרה ב יכולה להיות בעייתית אם קהל היעד הוא תלמידי כיתה א, שכן היא מסתמכת במפורש על המושג כפולה, אך התלמידים טרם למדו את פעולת הכפל." ברצוננו להוסיף על כך. השימוש בהגדרות הוא מופשט וקשה להטמעה על־ידי תלמידים צעירים. לכן, יש לדחות את השימוש בהגדרות לגילאים בהם אנו מצפים שהתלמידים יהיו בשלים לעיכול ההפשטה הכרוכה בשימוש בהגדרות. ייתכן גם שראוי כי השימוש המלא בהגדרות יידחה לשלב מאוחר של הלימודים בבית ספר על יסודי. מאידך, חשוב שהמורים יהיו אמונים על השימוש בהגדרות: זהו תנאי מקדים לכך שהמורים

ידעו להציג את חומר הלימוד באופן ברור, מדויק, וחד משמעי (ראו הרחבה של הנושא בפרק ד להלן).

יתירה מזו, בעיות אלו, של הימנעות משימוש בהגדרות או שימוש רשלני בהגדרה הן בעיות איתן אנו מתמודדים שוב ושוב בהוראה באקדמיה. מסתבר כי רכישת המיומנויות של ניסוחים מדויקים (כפי שנדרש בהגדרות) היא תהליך מורכב ולא פשוט כלל (ראו למשל לב, 2015, או Edwards and Ward, 2004), ולפיכך, הימנעות מרכישת מיומנות זו כבר בשלבי הלימודים בבית הספר יוצרת בעיות גם בלימודים האקדמיים, כאשר ההתמודדות עמן קשה ולפיכך כושלת במקרים רבים.

אחת הדוגמאות לחשיבות השימוש בהגדרות מופיעה בעמוד 100 של חלק א, לגבי הקונפליקט המתעורר בקשר לפעולת החילוק 0:0. רוב המורים יטפלו בבעיה זאת על־ידי כך שיאמרו בפשטות כי חילוק באפס אינו מוגדר. אולם אם יקבלו הסבר לגבי הרציונל מאחורי החוק החשוב הזה, יגדל הסיכוי שהם יוכלו להשתמש ברציונל זה כאשר יתקלו בבעיות דומות בעתיד. ככלל, הצגת הרציונל מאחורי קביעות אלו ואחרות יתרום לנטייה של הלומד להצגת שאלות ולחיפוש הסברים.

המחבר מציג את הקונפליקט ואת הרציונל באופן הבא:

> ננתח את התרגיל 0:0=? מנקודת מבט של חילוק לחלקים: יש לי 0 תפוחים שאותם אני רוצה לחלק שווה בשווה בין 0 ילדים. כמה תפוחים יקבל כל ילד?
>
> האם לא ברור כי התשובה היא 0, שהרי אין לי למי לחלק תפוחים אך גם אין מה לחלק? זו דוגמה שבה קיימים פערים בין השפה המתמטית ובין השפה המדוברת.

נחזור פעם נוספת להגדרה המתמטית שלפיה פתרון התרגיל 0:0=? הוא פתרון תרגיל הכפל 0=0x? (כלומר: פעולת החילוק היא הפוכה לפעולת הכפל; מדוע 3=6:2? כי 3 פעמים 2 שווה ל־6).

מכאן נקבל שכדי לפתור את התרגיל 0:0=? עלינו לחפש מספר שהכפלתו ב־0 תיתן 0. התשובה היא שכל מספר מקיים תנאי זה, אבל מכיוון שביטוי חשבוני מחייב הגדרה חד משמעית, גם במקרה זה נקבע שהביטוי החשבוני 0:0 אינו מוגדר.

דוגמה זאת גם ממחישה את החשיבות של השימוש בהגדרה מתמטית שמשלימה ומתקפת את חשיבתנו האינטואיטיבית.

כאן ברצוננו להוסיף הערה שהיא חשובה לדעתנו. הקורא בוודאי שם לב לכך שאותו דיון 'פשוט' על פעולת החילוק אינו פשוט כלל וכלל, ועל המורה לחפש את הדרכים הנאותות להסבר הנושא, כאשר הסבר זה תלוי בגיל וביכולת של התלמידים. ייתכן אף שהמורה ייווכח כי בזמן מסוים מוקדם לרדת לעמקו של הנושא ועדיף לחכות לזמן בו התלמידים יהיו בשלים לדיון בעל אופי מעמיק יותר. מאידך, יש לזכור כי לנושא זה של 'פעולות הפוכות' יש חשיבות מאוד גדולה במתמטיקה, ואנו נתקלים לא אחת בסטודנטים ומורים המתקשים בנושא המדובר ולפיכך מתקשים גם בנושא החשוב של 'פונקציות הפוכות' שקשור אליו (אנא נסו להעלות את שם פונקציית הלוגריתם, שהיא הפוכה לפונקציה המעריכית ומיוחד לה מקום מרכזי במתמטיקה – ולפיכך גם בלימודי המתמטיקה בתיכון – בפני פרחי הוראה של בתי הספר העל יסודיים, וצפו בכמה תגובות של רתיעה וחשש אתם נתקלים). לפיכך נקבל כי מחד, חשוב שהנושא יטופל באופן מעמיק וראוי בשלב המתאים של הלימודים בבתי הספר, ומאידך, חשוב שהטיפול בו יופקד בידי מורים ששולטים בו לעומק ואינם חוששים מפניו, דבר שפעמים רבות אינו בנמצא.

דוגמא נוספת לעבודה עם הגדרות מופיעה בחלק ב, בהגדרה של מספר ראשוני. ההגדרה שעמה "גדלנו" בבית הספר, ועמה הגיעו רבים מהסטודנטים שלנו, היא ש"מספר הוא ראשוני אם הוא מתחלק רק בעצמו וב־1". מהגדרה זו משתמע כי 1 הוא מספר ראשוני.

רבים מהתלמידים הוותיקים אכן היו משוכנעים כי 1 הוא מספר ראשוני למרות שלפי ההגדרה המקובלת (ראו ההגדרה להלן) 1 אינו מספר ראשוני.

הגדרה (ע"מ 84 חלק ב): מספר טבעי שלו בדיוק שני מחלקים מכונה מספר ראשוני.

(נעיר כאן כי אנו מעדיפים, למען הבהרת הדברים למי שאינו מנוסה בקריאה קפדנית, להוסיף את המילה "שונים" להגדרה, למרות שאין בכך כל תוספת לתוכן ההגדרה. כלומר: מספר ראשוני הוא מספר טבעי שלו בדיוק שני מחלקים **שונים**).

בשנים האחרונות השתנה הטעם, ומקפידים לציין כי 1 אינו ראשוני. ואנו חוזים כעת בתופעה מעניינת: גם בוגר ממוצע של 4 או 5 יחידות במתמטיקה יצהיר כי 1 אינו ראשוני, אך כשיתבקש להגדיר מספר ראשוני, מיד יביא הגדרה שממנה משתמע כי 1 הוא מספר ראשוני. יאמר מי שיאמר כי אין לכך חשיבות רבה, העיקר שהתלמיד ״מבין״ כי 1 אינו ראשוני. טעות יסודית טמונה באמירה זו. בתוצאות הלא נעימות של טעות זו אנו נתקלים בלימודי המתמטיקה בהשכלה הגבוהה (בעיקר בתחום המדעים המדויקים וההנדסה); הסטודנטים אינם מודעים לחשיבותה של ההגדרה המדויקת, מסתפקים באיזושהי תפיסה אינטואיטיבית (ומעורפלת לעתים קרובות) של המושגים החדשים המוצגים בזמן הלימוד, ותוך זמן קצר הופכת כל התפיסה של החומר לסחרחורת של ערפל המלווה באי דיוקים וטעויות.

המחבר אינו מסתפק אך ורק בהצגת ההגדרה של מספר ראשוני, בבחינת ״כזה ראה וקדש״, אלא גם מציג את הטעם לקביעה זו שבהגדרה (ראו דיון בעמודים 84-88 בחלק ב); קיים משפט מתמטי חשוב (שנקרא ״המשפט היסודי של האריתמטיקה״) האומר כך: כל מספר טבעי השונה מ־1 ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים באופן יחיד (כאשר ייתכנו במכפלה חזרות על אותו הראשוני, ואין התחשבות בסדר שבו מסודרים האיברים במכפלה. למשל: הצגת 12 כמכפלת ראשוניים היא 2x2x3=12). פירוש מקובל לתוצאה יסודית זו הוא שניתן לראות במספרים הראשוניים את ״אבני הבניין״ היסודיות של המספרים הטבעיים השונים מ־1 (מהם נבנה המספר על־ידי ביצוע פעולות כפל. כך, למשל, ״אבני הבניין״ של 12 הן 3,2,2 ולמספר הראשוני 7 יש אבן בנין יחידה: המספר הראשוני 7 בכבודו ובעצמו). מכאן מתברר מדוע לא נקבע 1 כמספר ראשוני: 1 הוא איבר ניטרלי לכפל, ולכן 1 אינו ״אבן בנין״, שכן כפל באחד אינו בונה דבר (נוכל לכפול מספר ב־1־ים כרצוננו, והמספר לא ישתנה). ההסבר של עובדה זו, מעבר לעניין שבו, ומעבר לעובדה שמציג הסבר הגיוני לקביעתה של הגדרה, גם מציג משפט מתמטי חשוב, שנמנה על המשפטים היסודיים של המתמטיקה. מניסיוננו אנו יודעים כי הרוב המכריע של בוגרי בתי הספר לא זוכה להסבר מעין זה על המספרים הראשוניים בזמן לימודיו, וחבל.

המחבר אינו מסתפק בהצגה ראויה של ההגדרות, אלא גם מציע למורים דרכים שונות ללמד נושא מסוים, כאשר הוא מתייחס לכך שלתלמידים שונים מתאימות גישות שונות, ולכן אחד מתפקידיו של המורה הוא לעזור לתלמיד למצוא את השיטה שמתאימה לו. חשוב שגם מורה הרגיל לשיטה מסוימת יוכל לגלות גמישות מחשבתית, ובפרט לבחון ולקבל פתרונות בדרכים שלא עלו בדעתו קודם לכן.

כך, למשל, בעמוד 84 של החלק הראשון, בפרק על הכפל, כותב המחבר:

> מומלץ לנצל את השלבים המוקדמים של לימוד הכפל כדי לפתח בתלמידים יכולות של חישוב מנטלי. בפרט, רצוי שהם יאמצו אסטרטגיות מגוונות לביצוע פעולות כפל בתחום ה־100 בטרם ילמדו את לוח הכפל בעל פה.

בהמשך הוא מציע אסטרטגיות אפשריות, כמו, למשל, ספירה בדילוגים, שימוש בחוק הקיבוץ ובחוק הפילוג. על כך הוא מוסיף: ״סביר להניח שאסטרטגיות רבות אחרות יפתחו התלמידים בעצמם. כל עוד דרך חשיבתם נכונה, יש לעודד אותם לפתח דרכים רבות ככל שניתן״.

בעמוד 23 של חלק ב, בפרק על כפל אנכי, המחבר מציע שני אלגוריתמים לכפל אנכי: ה״אלגוריתם השקוף״ ו״אלגוריתם הכפל האנכי התקני״. מעבר לכך שהמחבר משתמש במושג אלגוריתם (כלומר, מקפיד על שפה מדויקת), האפשרות להציע לתלמיד יותר מדרך אחת יכולה להועיל לו הן בהבנת התהליך והן בהפנמתו. הוא גם מסביר את היתרונות והחסרונות שבכל אחד מהאלגוריתמים.

> האלגוריתם התקני חסכוני מבחינת הכתיבה, אבל הוא עלול לבלבל ילדים. מומלץ לדחות את הוראת האלגוריתם התקני עד שהילדים יפגינו שליטה מלאה באלגוריתם השקוף. (מורים רבים אמרו לי שהם מעדיפים להתמקד באלגוריתם השקוף, ולעסוק באלגוריתם התקני רק עם תלמידים מתקדמים.)

גם לגבי אלגוריתם החילוק, טוען המחבר בעמוד 40 בחלק ב:

> איני ממליץ ללמד את אלגוריתם החילוק לפני שמושגת שליטה בפתרון המוחשי. מטרת האלגוריתם היא לחסוך

> בכתיבה, ולא מעבר לכך. הבנה מעמיקה יותר מושגת דווקא באמצעות פתרונות מוחשיים.

לכל אורך הספר המחבר משלב עובדות היסטוריות ומוטיבציה לכל הנושאים. לעיתים הוא מסביר איך הגיעו למושג מסוים או לאלגוריתם ולעיתים הוא נותן את הרקע ההיסטורי על מנת להוסיף צבע לנושא. גם המורה בבית הספר היסודי יכול להשתמש ברעיונות אלו בשיעור כדי להפוך את הנושא למעניין יותר ולקבלת אתנחתא מהלימוד הטכני של החומר.

דוגמא מעמוד 185 בחלק א:

> מדוע נבחרה זווית בת מעלה אחת כיחידת מידה? משום שאם נחבר זו לזו הרבה זוויות של מעלה אחת נקבל סדרה של זוויות הולכות וגדלות. אם נקבע את אחת השוקיים, הרי שככל שנוסיף עוד ועוד מעלות, השוק האחרת תנוע כמו מחוג של שעון. מספר המעלות הדרוש למחוג השעון כדי להשלים סיבוב שלם הוא 360, או ליתר דיוק, המעלה היא החלק ה־1/360 מסיבוב שלם. מדוע נבחר דווקא המספר 360? מתברר ש־360 נתפס בעת העתיקה כמספר מיוחד מפני שיש לו מחלקים רבים, ובפרט כל המספרים עד 10 למעט 7.

אחד היתרונות החשובים ביותר של הספר הוא החינוך לעצמאות. אחת הציפיות השכיחות אצל סטודנטים הבאים בשערי האקדמיה היא הציפיה לקבלת נוסחה או מתכון שיאפשרו את מציאת התשובה לשאלה, דבר שהוא הפוך לחלוטין ממה שהיינו מצפים שיקרה בלימודי המתמטיקה. בלימוד המתמטיקה יש להדגיש את פיתוח השיטות ופיתוח המחשבה, והמחבר מנסה לתת לכך את הדגש.

בהקדמה לספרו מסביר המחבר מדוע לא מצורפים פתרונות לתרגילים המופיעים בספר:

> באופן מודע לא צירפתי פתרונות. אני מאמין שחשיבות התרגילים היא במחשבה שהם מעוררים, ולכן פתרונות עלולים לפגוע בנכונות להשקיע את הזמן הנדרש להתמודד עם שאלה, ובזאת לפגוע בהזדמנות לרכוש תובנות שלא יעלו בעת קריאת פתרון.

בנוסף, הוא כותב בעמוד 43 של חלק ב: "בפרק זה אנו שמים את הדגש על דרכי פתרון שיטתיות, אבל אין להבין מכך שדרכים אלה מייתרות את השימוש בשכל הישר..".

ג. אז מה הבעיה...

קורא שהשתכנע בחשיבותו של הספר עלול לרצות לסיים את הדיון כאן, תוך המלצה בפה מלא על הטמעת השימוש בספר בכל התכניות להכשרת המורים. מסתבר כי הדברים אינם כה פשוטים, וקיימות מספר בעיות המקשות על הטמעת הספר בתכניות להכשרת המורים.

על הבעיה הראשונה ניתן ללמוד מדברים שצוטטו מפי מחבר הספר בעיתון "כלכליסט" (אמסטרדמסקי, 2015):

> לרוב המורות והמורים ביסודיים יש חרדת מתמטיקה. זו נקודת מוצא קשה מאוד ללימודי מתמטיקה. מורים יודעים ללמד, לזה הם הוכשרו. אבל במתמטיקה, לעתים הרמה של המורות היא 3 יחידות לימוד, והן לא הוכשרו לכך כלל. זה נכון באופן גורף לכל המורות והמורים ביסודי. כל מי שמלמד מתמטיקה בכיתות א-ב הן המתנכות, ולרוב זה המקצוע השנוא עליהן. זה יוצר מצב שבו הלמידה של התלמידים היא אוטומטית, והם לא באמת מבינים מה הם עושים.

אף אם דברים אלו של המחבר גורפים מדי, הרי הבעיה שהעלה היא בעיה ממשית שקיימת בשטח. על כך, למשל, מעיד גם שלמה וינר, מתמטיקאי חוקר בעברו, שפנה לתחום החינוך כבר לפני שנים רבות (וינר, 2014). גם אנחנו, מניסיוננו בהכשרת מורים לחטיבה העל יסודית, יכולים להעיד כי רבים מפרחי ההוראה לחטיבת הביניים והתיכון עלולים להתקשות בנושאים רבים המוצגים בספר, קל וחומר פרחי ההוראה של בית ספר יסודי.

לפני שנמשיך, ברצוננו להבהיר דבר חשוב. רבים מהמורות והמורים בבית הספר היסודי הם מורים טובים ומסורים שדרכם החינוכית ראויה ללימוד ולחיקוי. כל הביקורת שמועלית כאן היא לגבי שליטתם בדיסציפלינות שהם מלמדים (ובמיוחד במתמטיקה, שהיא ענינו של מאמר זה). כשתעלה השאלה אם אנו מעדיפים

שהמורה של ילדנו יגלה שליטה ראויה במתמטיקה, או שיהיה דמות חינוכית ראויה, אנו נעדיף ראשית לכול את האפשרות השנייה.

להלן נביא בקצרה עוד מדבריו של וינר במאמר הנזכר למעלה. הוא מציע ״שלושה עקרונות פדגוגיים שאמורים להנחות מעצבי תכניות לימודים ומורים לחינוך״. עקרונות אלו הם חשובים וברורים מאליהם, אך נראה שכולם או חלקם ״נשכחו״ במערכת החינוך שלנו. בהצגת העיקרון הראשון הוא מביא מדברי הפסיכולוג החינוכי דיוויד אוזובל (Ausubel 1968): ״הגורם האחד החשוב ביותר שמשפיע על הלמידה הוא **מה שהלומד כבר יודע.** יש לברר זאת וללמדו בהתאם״ (ההדגשה שלנו).

העיקרון השני מכונה **העיקרון של טווח התפתחות קרובה** (Vygotsky, 1986), שעיקרו אומר כך: ״אנחנו לא צריכים לנסות ללמד את הלומדים שלנו נושאים שהם מעבר ליכולת האינטלקטואלית שלהם״.

העיקרון השלישי הוא **העיקרון של קצב הוראה מתאים**. וינר מוסיף וכותב על עיקרון ״ברור מאליו״ זה:

> בסילבוסים רבים של תכניות הלימודים יש נטייה כללית לעומס יתר. מסיבה זו וגם בגלל ההתחייבות הבלתי כתובה לכסות את כל הסילבוס, קצב הלימודים בקורסים רבים הוא מהיר מדי עבור הרוב המכריע של הלומדים.

וינר ממשיך וכותב: ״התעלמות משלושת העקרונות האלה מביאה ללמידה לא משמעותית. למידה לא משמעותית מתבטאת לעתים קרובות במה שאני מכנה ׳התנהגויות פסוודו־אנליטיות ופסוודו מושגיות׳ (Vinner, 1997)״. על כך הוא מוסיף: ״ללמד משהו שאנחנו לא ממש מבינים זהו נזק חינוכי ממדרגה ראשונה. אבל למרבה הצער, זה המצב אצל מורות רבות בבית הספר היסודי״.

וינר מסביר את כוונתו במושגים ״התנהגויות פסוודו־אנליטיות״ ו״פסוודו מושגיות״ כהתנהגויות ש״מאפיינות אנשים שמנסים להראות שהם יודעים משהו על נושא מסוים אף על פי שבפועל ידיעתם קלושה או אף אינה קיימת...״. הוא מציג מספר אנקדוטות מעניינות להמחשת הדברים (הקורא מופנה לעמודים 31-34 של וינר, 2014 לדיון בנושאים חשובים אלו). ברצוננו להוסיף כי התנהגויות מעין אלו אינן נחלתם הבלעדית של המורות והמורים. נהפוך הוא:

התנהגויות אלו מופיעות תדיר בכל מרכיבי המערכת, מהמורים, המשך במדריכים הפדגוגים והמפקחים, וכלה בכותבי תכניות הלימודים. דוגמה בוטה למדי מובאת בספרו של צבי ארטשטיין (ארטשטיין, 2014). צבי ארטשטיין, שהוא פרופסור למתמטיקה במכון וייצמן, מתאר פגישה בין הורים למורים שבה נכח לפני שנים לא מועטות כהורה לילד בכיתה א. בפגישה זו הוצגה תכנית לימוד חדשה על־ידי מורה בכירה ממשרד החינוך. מסתבר שמישהו במשרד החינוך שמע כנראה על עבודתם החשובה של מתמטיקאים בהשתת מושג המספר על מושג הקבוצה, עבודה עמוקה שהמקום הראוי ללמדה הוא בלימודי המתמטיקה באוניברסיטה (ביתר לימודי המדעים המדויקים היא לא נלמדת כלל). כאשר עבודה מוכרת על־ידי מישהו, אך משמעותה ועמקה אינן מוערכות כראוי על־ידו, הוא עלול להחליט (כפי שאכן קרה) שמן הראוי ללמד את תלמידי כתה א על פי תכניה של עבודה זו, על מנת להעמיק את הבנת הזאטוטים במושג המספר. כמובן שלתוכנית הזויה כזו יכולה להיות רק תוצאה אחת: יצירת בלבול וערעור הביטחון של הילדים בהבנה האינטואיטיבית של המושג הבסיסי "מספר". אין פלא שתוכנית זו הוצאה מתוכנית הלימודים בהמשך. אנו ממליצים לקורא לעיין בעמודים 430-437 בספרו של ארטשטיין, ולקרוא על סיפור המעשה (ועוד סיפורים באותו עניין) שמציג המחבר. למרבה הצער, לא מדובר על אנקדוטה חד פעמית. שוב ושוב אנו נתקלים בתכניות חדשות ומתקדמות בכל רמות הלימוד, שרובן ככולן מתקדמות מדי, ולפיכך הדרך היחידה שניתן להעבירן לתלמידי בתי הספר היא על־ידי אימון בפרוצדורות מוכנות לפתרון תרגילים השייכים לתבניות מסוימות, ללא כל הבנה מעמיקה של היסודות העומדים בתשתית של אותן הפרוצדורות.

למרות הנזק העלול להיגרם מאי הקפדה על שלושת העקרונות שמנה וינר, לא מתקיימת הקפדה כזו בכל המערכות, כולל האוניברסיטאות. השפעה רעה בעניין זה מגיעה לדעתנו דווקא מהאוניברסיטאות. שם, לפחות בלימודי המדעים המדויקים וההנדסה (אותם אנו מכירים ישירות), הלימוד ראוי מבחינת הצגת התכנים. אולם הוא נלמד ברמה ובקצב המתאימים לסטודנטים הראויים להיות תלמידי מחקר. רוב הסטודנטים אינם כאלו, ולפיכך הידע עמו הם

מגיעים ללמודים אינו תואם את הנדרש בדרך כלל, חלק לא קטן מחומר הלימוד הוא מעבר ליכולת האינטלקטואלית שלהם, וקצב הלימודים מהיר מדי עבורם. מכאן קצרה הדרך ל״למידה לא משמעותית״, כפי שמנוסח על־ידי וינר. כאשר אנו מעלים את הבעיה בפני עמיתים, אנו נתקלים לא אחת בתשובה ״אנו יודעים כי חלק גדול מהסטודנטים לא ׳מפנימים׳ את חומר הלימוד, אולם רמת הלימודים הידרדרה מספיק גם כך, ואין להורידה עוד״. לדעתנו זו תשובה גרועה מאוד. משום שבמצב הנוכחי, שבו רוב הסטודנטים לא מפנימים, הרי גם רוב פרחי ההוראה (השייכים לאוכלוסייה של ׳רוב הסטודנטים׳) אינם מפנימים, ומדוע שתלמידיהם ׳יפנימו׳? וכך נוצר מעגל של ׳חוסר הפנמה׳ העוטף את כל מערכת החינוך מראשה ועד רגליה. לסקירה על שורשיו של מצב עגום זה, ועל דרכים אפשריות להתמודדות עמו, ראו (לב, a2015), (לב, b2015) ו־(לב, 2013).

לאור האמור לעיל אנו עומדים לפתע בפני דילמה קשה. אנו מסכימים כי חשוב וראוי שמורי בית הספר היסודי יכירו את החומר שהם מלמדים לעמקו, אולם, מאידך, לימוד מעין זה עלול להיות מורכב מדי עבור הלומדים, ובכך להביא אותנו לאותו מצב של ״נזק חינוכי ממדרגה ראשונה״ שמפניו מזהיר וינר. הבה נעמוד על שלושת העקרונות שמנה וינר בהקשר של הספר שלפנינו.

כבר מעיון ראשון בספר אנו מתרשמים מהמספר הרב של הנושאים ותת הנושאים הנדונים. קשה להשתלט על מגוון כה רחב, במיוחד אם קהל היעד אינו מאומן או מוכן ללימוד מעמיק. במצב כזה של עומס יתר, קל להגיע למצב של אותו ׳חוסר הפנמה׳ שתואר בפסקה הקודמת. המחבר אינו אשם, כמובן, ביצירת העומס הזה. תכנית הלימודים של בית הספר היסודי פשוט עמוסה מדי! אם המחבר רואה עצמו מחויב לכיסוי כל הנושאים הנלמדים, הרי אין לו ברירה אלא לעבור על כל אותו העומס. מובן שהדבר אינו חייב להיות כך. לדעתנו קיימים שני מקורות עיקריים לאותו עומס. ראשית אותן התנהגויות ״פסאודו אנליטיות״ ו״פסאודו מושגיות״ שמציין וינר. כאשר קברניטי המערכת אינם מבינים את העומק שעומד מאחורי חומר הלימוד, הם לא יקצו כמובן את הזמן הראוי ללימוד ראוי של הנושאים. המקור השני מגיע מהכיוון ההפוך, מזה של אנשי

הדיסציפלינה, המומחים למתמטיקה, שמבינים את העומק מאחורי החומר הנלמד, אך אינם מודעים לקשיים בהם ייתקלו התלמידים והמורים ב״הטמעה״ של החומר, ולפיכך לוחצים על המערכת ״להספיק הרבה נושאים״. יתירה מזו, הרמה בה מועבר החומר בספר עלולה להיות גבוהה מדי לחלק לא מבוטל של הלומדים. לאור כל אלה, נשאלת השאלה כיצד ניתן להשתמש בספר באופן שבו נימנע מהמכשלות שמנינו בפסקאות הקודמות. להלן ננסה לעמוד על כמה נקודות חשובות.

ראשית, אין כל טעם בלימוד נושא כאשר הלומדים אינם רואים אותו כרלוונטי עבורם. גם המחבר עמד על ענין זה בדברים המובאים מפיו (אמסטרדמסקי, 2015): ״הוא מודה בעצמו שנדרשו לו כמה שנים כדי לשכנע את המורים שמדובר במשהו שיהיה רלבנטי לעבודתם״. מניסיוננו בהכשרת מורים (אם כי לבתי הספר העל יסודיים), בעיה זו של שכנוע היא קשה ביותר, ואף לאחר שמישהו השתכנע בחשיבות של החומר הנלמד, הוא מוצא עצמו חסר אונים לנוכח מערכת הלימודים העמוסה בחומר לימוד ומשועבדת ללימוד דרך פרוצדורות, ואינו מוצא את הדרך ליישום של מה שלמד. בעיה זו היא מרכזית וחשובה, ולכן הקדשנו לה פרק שלם (פרק ד להלן).

שנית, קיימת הבעיה של עומס החומר, והתאמתו לרמת הלומדים. בנושא זה חשוב להקפיד, לדעתנו. יש להקדיש זמן מספיק ללימוד החומר, ואם זמן זה לא עומד לרשותנו, יש לוותר על חלק מנושאי הלימוד. כאן בהחלט עדיפה האיכות על הכמות. יש לזכור נקודה חשובה (שפעמים רבות לא זוכה לתשומת לב ראויה במערכת החינוך): **לימוד ראוי אינו נמדד ב׳כמות החומר שהספקנו׳ אלא בתובנות וההרגלים שרכשנו תוך כדי הלמידה:** היכולת לקרוא ולהתנסח באופן ראוי, ההרגל לעצור לחשיבה ולעיון, הנכונות לשאת את התסכול שבאי הצלחה, הנכונות לא להרפות מבעיה מיד לאחר הקושי הראשון, ועוד. לגבי ההתאמה לרמת הלומדים: כאן נדרש מאמץ מתמשך וצמוד, תוך קשר ישיר עם כל אחד מהלומדים, כדי להבין באיזו רמה הוטמע החומר. קל לטעות בעניין זה. ייתכן שתלמיד יצליח במטלות, למרות שאינו מבין כראוי, אם אין הקפדה על תוכן המטלות ועל בדיקה זהירה שלהן. גם משוב מהסטודנט עלול

להטעות; פעמים רבות הלומד עצמו אינו מסוגל להעריך כראוי את רמת שליטתו בחומר הנלמד. על הקלות שבה ניתן לטעות בעניין זה יעידו הלימודים האקדמיים, שבהם חומר הלימוד מועבר בדרך פחות או יותר ראויה מצד אחד, אך רבים מהסטודנטים ׳אינם מפנימים׳, גם אם עברו את הבחינות. לכן, גם אין להתעקש על ״קושי״ החומר. אם נגלה שהתלמידים מתקשים ב׳הפנמה׳ של חומר מסוים, אפשר ״לסגת לאחור״ ולוותר על נושא שהוא מעבר ליכולת האינטלקטואלית של התלמידים. עדיף לימוד ראוי של חומר פשוט, מאשר לימוד של חומר מורכב שאינו ׳מופנם׳ כהלכה.

בעיה שלישית היא הטמעת הנלמד במעשה ההוראה. אין ספק שלצורך זה חשוב שהספר לא ישמש אך ורק בקורסים להכשרת מורים או בהשתלמויות למורים. חשוב שהספר המדובר (או אחרים כמותו) ישמש גם בשלב של ההדרכה הפדגוגית, וישמש את המורה גם בעבודתו המעשית בבית הספר. אולם מי יסייע וידריך לגבי השימוש בספר? כאן אנו חוזרים לאותה בעיה שקיימת במערכות ההכשרה להוראה ושאותה הזכרנו גם קודם. הדיסציפלינה נלמדת אצל המומחים שאינם מבינים הרבה בפדגוגיה, וההדרכה במעשה ההוראה ניתנת על־ידי אנשי הפדגוגיה שמומחים בנושא שבו הם עוסקים, אך פעמים רבות מומחיותם בדיסציפלינה מוגבלת. מכאן החשיבות של אותו שיתוף פעולה (שהוזכר קודם) של אנשי הדיסציפלינה והפדגוגיה בכל השלבים של המעשה החינוכי, כולל בהדרכה הפדגוגית, ובהדרכה והסיוע בעבודה בבתי הספר עצמם. לצערנו, שיתוף פעולה כזה חסר במקומותינו. ראו הרחבה של הדיון בנושא חשוב זה ב־(לב, 2015). במיוחד נזכיר את הסיפור (האמתי) של מרצה לכימיה בשם רוני המתואר ב־(גרינספלד ושות׳, 2008, עמודים 193-202). בסיפור זה מתוארים כל השלבים שעבר רוני, החל מהרגע שנוכח באותה בעיה של ׳חוסר הפנמה׳ של סטודנטים שנראו לו קודם לכן מבינים, וכלה במעבר לשיתוף פעולה מלא עם המדריכות הפדגוגיות. לדעתנו, סיפור זה מדגים באופן נאה את התהליך שראוי שיתרחש בהכשרת המורים, ואנו ממליצים לקוראים לעיין בסיפור המעשה (ציטוט ותיאור מקוצר מובאים גם ב־לב, 2015). בשיתוף פעולה כזה יש להיזהר מתופעה שהיא שכיחה

במקומותינו: יחס מתנשא של אנשי הדיסציפלינה (הרי הם ה׳מומחים׳), לעומת ׳התבטלות׳ של אנשי הפדגוגיה בפני ה׳מומחים׳. צירוף זה של התנשאות המלווה בבורות (הרי לגבי פדגוגיה ולימוד של ילדים, רוב אנשי הדיסציפלינה לא יכולים לטעון למומחיות), מביא לא אחת לאימוץ תכניות לימודים ודרכי הוראה שנראות נפלאות, אך מתרסקות בעת ביצוען. על שיתוף הפעולה להתבצע מתוך יחס של כבוד הדדי, ונכונות של שני הצדדים ללמוד זה מזה, בדומה למתואר בסיפור של רוני, שהוזכר למעלה.

לבסוף, נזכיר את הבעיה של תכניות הלימודים. כפי שהזכרנו קודם, מערכות אלו בנויות על תרגול פרוצדורות לפתרון בעיות מחד, והן עמוסות בחומר מאידך. מה יכול לעשות אותו מורה שמעוניין להעמיק בנושא מסוים? לכך הרי נדרש זמן! ואין לו הזמן הזה, הוא יפגר בחומר הלימוד! ולפיכך יטיח בנו אותו מורה: ממילא המערכת אינה מאפשרת לי לנצל את מה שלמדתי אצלכם. מכך אני מסיק שלימוד זה הפך למיותר. אנו נתקלים לא אחת בגישה כזו. גם אנו מוצאים עצמנו לעתים חסרי אונים כאשר מורה שואל אותנו כיצד יוכל להעמיק בפועל בנושא מסוים, לאור הבעיות של תכניות הלימודים. תשובה אחת חשובה לטענות אלו של המורה היא כדלקמן: גם אם תלמד לפי דרישות המערכת ללא כל עדכון ושינוי, הרי לכל מה שלמדת אצלנו יש ערך רב והוא יתרום לשיפור בהוראתך. כיצד? יתהה אותו מורה. כאן אנו חייבים למענה ראוי לשאלת המורה, מענה שיוצג להלן, בפרקים הבאים.

ד. מדוע צריך את כל זה...

בפרק הקודם עמדנו על הצורך בשכנוע המורים בחשיבות של העמקת הידע המתמטי, במיוחד לאור העובדה שהם מלמדים במערכת שבה ניתן הדגש ללימוד שטחי, המיוסד על יישום של פרוצדורות לפתרון תרגילים. לפיכך, דעתנו היא כי חשוב שיתקיים דיון מתמשך ומעמיק בנושא זה בכל הרמות של המעשה החינוכי, ובמיוחד במסלולים להכשרת מורים. לכן מצאנו לנכון להקדיש את הפרק הנוכחי לדיון על הנושא, על מהותו, חשיבותו, ותיאור המצב בשטח. הואיל שנושא הדיון מורכב ולא פשוט, והיריעה קצרה, נתרכז בעיקר בהדגמה של

שני נושאים חשובים, וגם זאת על קצה המזלג. הדיון שנציג רלוונטי ללימוד המתמטיקה בבתי הספר בכל הרמות, מיסודי ועד תיכון, ואין לנו ספק כי רבים מהדברים רלוונטיים גם להוראה של דיסציפלינות אחרות.

הנושאים בהם נדגים את הדיון הם **הבנת משמעותם של מושגים והיכולת להתנסח באופן בהיר ומדויק.** כבר ציינו קודם את חשיבותם של נושאים אלו, ואת העובדה שהם קשים מאוד לרכישה ולהטמעה (ראו דיון מורחב על כך ב־לב, 2015). העובדות הן כי רוב בוגרי בתי הספר אינם יודעים לנסח כראוי אפילו הגדרות או טיעונים פשוטים במתמטיקה. גם בהכשרה להוראה לא ניתן לכך דגש, ולפיכך אין פלא כי נוצר כאן מעגל של חוסר מיומנות. כאשר אנו מנסים לתת דגש כלשהו (בסיסי, לא קפדני במיוחד) לסוגיה של ניסוח ראוי אנו נתקלים בהתנגדות מצד פרחי ההוראה וגם מצד המורים. כמה טענות המועלות תדיר הן כדלקמן.

1. האם לא מספיק לדעת איך פותרים את הבעיה? האם לא מספיק שרואים שהבנו?
2. הדרישות ה״קפדניות״ לניסוחים מדויקים ״הורגות״ את החשיבה ואת האינטואיציה.
3. הרי גם המדריכים והמפקחים שלנו אינם דורשים מאתנו הקפדה כזו. הגזמתם.
4. הרי אי אפשר לדרוש דרישות כאלו מתלמידי בתי הספר (בטח לא מתלמידי בית הספר היסודי). אז מדוע מוצגות בפנינו דרישות כאלו לגבי נושאים שאיננו אמורים ללמד או להקנות?

אי אפשר לפטור טענות כאלו בהינף יד. לדעתנו גם הסברים ״כלליים״ לא יצליחו לשכנע רבים מטועני הטענות. גם דחיית ההסבר בטענה ״בסוף, אחרי שתלמדו, תבינו״ אינה ראויה. לימוד של נושא שהלומדים אינם מבינים את טעמו ונחיצותו בהכרח ילקה בחסר. הבנה ראויה של חשיבות הנושא יכולה להתקבל רק אם הדיון בנושא יתבצע באופן רציף לאורך הלימודים, וילווה בהמחשות ודוגמאות. לפיכך, נביא להלן מעט דוגמאות, מכל רמות הלימוד בבתי הספר, מיסודי עד תיכון. בכל הדוגמאות מתוארים מקרים אמתיים שאירעו לנו או לעמיתים.

דוגמה ראשונה: בית ספר יסודי: התלמידים למדו כיצד מציגים מספר (טבעי) נתון כמכפלה של מספרים (טבעיים) קטנים ממנו. באחת השאלות מתרגילי הבית הוצגו כמה מספרים, והתלמידים התבקשו להציג כל אחד מהם כמכפלה ארוכה ככל האפשר של מספרים קטנים יותר. אחד התלמידים קרא את השאלה, הבין אותה כפשוטה ושמח לגלות כי את כל אחד מהמספרים יוכל להציג כמכפלה של מספרים קטנים יותר שהיא ארוכה כרצונו. פשוט יוסיף למכפלה 1־ים כרצונו. וכך למשל יוכל להציג את המספר 6 כמכפלה של 5 מספרים קטנים יותר: 1x1x1x2x3=6. כשהתשובה נבדקה על־ידי המורה היא זכתה לאיקס גדול בצבע אדום, כראוי לתשובה שגויה. כשהילד בא למורה בטענה כי ענה על הנדרש בשאלה, טענתו נדחתה על הסף. הרי "ברור" שהכוונה הייתה לא להשתמש ב1־ים. הילד הנעלב הראה את התשובה לאמו, שהיא במקרה מתמטיקאית. היא כעסה: הרי התשובה תאמה לשאלה. מה קורה כאן?

מה שקורה כאן הוא דבר פשוט. כל מי שמיומן ורגיל בניסוחים מדויקים יודע כי הילד קרא את השאלה כפשוטה וענה בדיוק על הכתוב (ומדובר על ילד מוכשר שאינו מתחכם. גם המורה לא העלתה כל טענה לגבי ניסיון להתחכמות). כל שצריכה הייתה המורה לומר לילד הוא שהיא התכוונה למשהו אחר, ולא הקפידה על הניסוח משום שהניחה שהתלמידים יבינו את כוונתה לאור הדברים שנלמדו בשיעור. מאידך, מתאים היה לשבח את הילד על ששם לב לנקודה העדינה. במקום זאת למד הילד לקח אחר: ניסיון לקריאה עצמאית של טקסט הוא פסול. במקום שתנסה להבין בעצמך, דאג שמישהו אחר יבין בשבילך. דוגמאות לא משמחות כאלו לא חסרות, וכל מקרה כזה פוגע בניסיון להרגיל את התלמידים לחשיבה עצמאית.

ומה הסיבה למקרים כאלו? סיבה אחת ויחידה. מורים שאינם ערים לחשיבות של הניסוח המדויק. אצל מורים כאלו, התלמיד צריך לעשות מה שהמורה רוצה ולא להבין טקסט בעצמו.

דוגמה שניה: חטיבת ביניים. בלימודי הגיאומטריה בחטיבת הביניים נדרשים התלמידים לכתוב הוכחות לטענות. הוכחה במתמטיקה היא למעשה הסבר מדוע טענה נכונה. וההסבר עצמו בנוי מסדרה של טענות, שכל אחת מהן מסתמכת על קודמותיה או על

דברים שאנו מניחים שהם כבר ידועים, עד שלבסוף מגיעים למסקנת הטענה. כאשר אנו למדנו בכיתה ט, כך נהגנו להוכיח. ודרך זו של כתיבת הוכחה, שהיא טבעית לכל מי שמסוגל לחשוב באופן סדור נקוטה בידינו עד היום.

אולם מסתבר כי קיימת בעיה. תלמידים בחטיבת הביניים מתקשים בכתיבה ראויה של הוכחות. ולמרבה הצער גם חלק מהמורים מתקשים. לבעיה זו מצאו קברניטי מערכת החינוך סיוע בדמותה של טבלה, שבה נכתבות ההנחות בעמודה אחת, המסקנות והנימוק בעמודה אחרת, וכיוצא בזה (לצורך תיאור המעשה אין צורך בפירוט מלא של השיטה הטבלאית המדוברת).

יום אחד פנתה בתו של מתמטיקאי לאביה ובקשה עזרה בכתיבת הוכחה לטענה בגיאומטריה. האב, שרצה שבתו תבצע את העבודה בעצמה, בקש ממנה להציג את השאלה, לומר מה הנתונים, מה היא מסיקה מהם וכיוצא באלו. להפתעתו גילה האב כי בתו הצליחה במלאכה ללא כל קושי מיוחד. אם כך, מה הבעיה, שאל. הבעיה, ענתה הבת, שאינני יודעת כיצד **לכתוב** את ההוכחה. אין בעיה, אמר האב. אנא חזרי על מה שאמרת קודם, אני ארשום את דברייך על דף, ונבחן את התוצאה. ואכן כך נעשה. ראי, הציג האב בגאווה את הכתוב על הדף. הרי לפנינו הוכחה לתפארת. אבל אבא, ענתה הילדה כשמבט מבולבל נשקף מעיניה, דבר כזה אני יודעת לכתוב. אך כשאני כותבת כך המורה טוענת שאינני כותבת בשפת המתמטיקה! לא עזרו דברי ההסבר של האב כי הוא עצמו כותב כך מאז ומעולם, ושכתבי עת מתמטיים מהשורה הראשונה מוכנים לקבל את אותה הכתיבה שלו. נאלץ האב לפנות אל אותה הטבלה, ולגלות, כי לאור העובדה שבשום מקום לא נמצאו בכתובים הערות ברורות לגבי הדרך הנאותה למילוי הטבלה, גם הוא, כמו בתו, מתקשה בכתיבה בשפת המתמטיקה. כשפנה האב לעמיתיו וסיפר את הסיפור המוזר, הסתבר שאינו היחיד שנתקל בבעיה זו, והפרשה של אימוץ אותה טבלה כאורים ותומים של הכתיבה המתמטית הוא אכן חזון נפרץ.

ושוב, הסיבה למקרים כגון אלו ברורה. למורה שאינו אמון על כתיבה נאותה של הוכחות אין יכולת, או בטחון כדי לבחון באופן עצמאי עבודה שנעשתה בדרך ששונה מזו שהוא רגיל אליה. מורה

בעל יכולת ובטחון ללא ספק היה משבח את התלמידה על ההוכחה הנאותה, ולכל היותר היה יכול לבקש ממנה לכתוב את ההוכחה בדרך הנוספת אותה הציג בשיעור. אם התלמידה הייתה מתקשה בכתיבה זו, היה מבין כי אין כאן בעיה מהותית של התמודדות עם חומר הלימוד, אלא בעיה של יישום פרוצדורה מסוימת. התוצאות העגומות של מקרים אלו ברורות גם כן. אנו רואים כיצד גם תלמידים בעלי נטייה לחשיבה עצמאית עלולים לאבד את הביטחון ביכולתם. למען הסר ספק, נעיר כי אין אנו מבקרים כאן את עצם השימוש באותה הטבלה. מאידך, נדגיש כי שימוש בעזרים (כמו הטבלה המדוברת) יוכל לעזור אולי בעניינים טכניים בעיקר, אך לא יוכל לחפות על חוסר מיומנות מספיקה של מורים, תופעה שקיימת במקרים לא מעטים.

דוגמה שלישית: חטיבת ביניים. מורה צעירה שזה עתה התחילה ללמד בחטיבת ביניים פונה למרצה שלה לשעבר בשאלה כיצד עליה להסביר שנוסחה מסוימת שווה לשיפוע של קו ישר. כששואל אותה המרצה מה ההגדרה של שיפוע של קו ישר, היא מתבלבלת. לפיכך מזכיר לה המרצה את ההגדרה, מסביר את המשמעות האינטואיטיבית של ההגדרה (היחס בין "עליה" ל"התקדמות"), ובעזרת הסבר זה מציע לה כיצד תוכל להציג בפני תלמידיה דוגמאות שימחישו לתלמידים באופן ברור כיצד הנוסחה אכן מציגה את השיפוע המדובר.

דוגמה זו ממחישה כי אם ברצוננו לחפש דרך להסבר משמעות של מושג, עלינו קודם כל להבין כראוי את ההגדרה המדויקת למושג. זה יהיה הבסיס שעליו נשען ברגע שננסה לבנות הסבר אינטואיטיבי המלווה בדוגמאות (גם אם אין בכוונתנו להציג בפני התלמידים את ההגדרה הפורמלית עצמה). ללא הבסיס של הבנת ההגדרה המדויקת, אנו עלולים להיקלע לבלבול, ולהצגת הסבר לא ברור ולא מדויק.

דוגמה רביעית: חטיבה עליונה. במסגרת לימודי החשבון הדיפרנציאלי לומדים התלמידים כיצד למצוא נקודות מקסימום או מינימום מקומיים של פונקציה (ההגדרה של מינימום מקומי למשל היא: נקודה a היא נקודת מינימום מקומי של הפונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של הנקודה a כך שהערך של הפונקציה ב־a קטן או שווה מהערך של הפונקציה בכל נקודה אחרת בסביבה. יסלחו לנו

הקוראים ששכחו מהי פונקציה או מהי סביבה: אנו מקווים כי יוכלו לעקוב לפחות אחר רוח הדברים). למציאת אותן נקודות יש פרוצדורה סדורה: נחשב את הנגזרת של הפונקציה, נשווה את הנגזרת לאפס, ולאחר עוד מספר פעולות נמצא את הנקודות הדרושות. כאשר אנו מציגים למורים תשובה של תלמיד על שאלה פשוטה, שבה הצליח להראות שנקודה a היא נקודת מינימום מקומי באופן נכון, אך ללא שימוש בפרוצדורה, אלא תוך שימוש ישיר בהגדרה, רבים מהם מסתייגים מהתשובה בנימוק שתשובה שבה לא הוצגה הפרוצדורה היא חסרה. יתירה מכך, כאשר אנו מציגים דוגמה פשוטה של נקודת מינימום מקומי עבורה אי אפשר ליישם את הפרוצדורה (למבינים: דוגמה פשוטה לכך היא פונקציית הערך המוחלט), מורים לא מעטים מתבלבלים וחלקם אף טוענים: ״אם אין נגזרת בנקודה אז אין מינימום או מקסימום מקומיים״, למרות שקיום הנגזרת בנקודה אינו מהווה תנאי הכרחי לכך שתהיה נקודת מינימום מקומי.

בדוגמה זו אנו רואים, מעבר למה שראינו בדוגמאות הקודמות, כי הזנחת ההבנה היסודית של מושגים (וגם של משפטים והתנאים בהם הם חייבים לעמוד) גורמת לתופעה המתסכלת של ״שיעבוד לפרוצדורות״. חלק נרחב מלימוד המתמטיקה, גם בתיכון, ואפילו בלימודים ל־5 יחידות, הופך לשינון ותרגול של פרוצדורות, כאשר התלמידים לא נדרשים, גם בבחינות הבגרות, להבין מה עומד מאחורי הפרוצדורות (וכיצד יבינו, אם הדבר לא נהיר גם למספר לא קטן של מורים?).

וזה המקום לחזור לארבע הטענות שהוצגו קודם להצגת הדוגמאות. להלן נדון בטענות אלו ובתשובות להן.

טענה ראשונה: האם לא מספיק לדעת איך פותרים את הבעיה? האם לא מספיק שאנו יודעים ליישם את הפרוצדורה לפתרון?

זו טענה מאוד שכיחה, שאותה אנו שומעים מכל הסטודנטים, ולא רק מסטודנטים להוראה. שכיחות טענה זו אינה מפתיעה, לאור העובדה שעיקר הלימוד של המתמטיקה בבית הספר נשען על לימוד ויישום פרוצדורות. שלמה וינר, שחקר את תפיסת המתמטיקה של

מורות בבית הספר היסודי (Vinner, 2011) מציין במאמר נוסף (וינר, 2014):

> מכאן סביר להניח שתפיסת המתמטיקה שלהן נקבעה לפי ההתנסות המתמטית שהייתה להן בבית הספר כתלמידות וכמורות. אם נכליל את ההתנסות המתמטית שלהן, נוכל להניח שהמתמטיקה תצטייר בעיניהן כאוסף של פרוצדורות שצריך להשתמש בהן כדי לפתור אי אילו בעיות אופייניות הניתנות לתלמידים בכמה מבחנים גורליים (כמו מבחני סוף שליש וסוף שנה, בחינות בגרות ומבחנים פסיכומטריים).

העובדה שתפיסה כזו של המתמטיקה היא לקויה, ברורה לכל מי שמבין את מהותו של מקצוע המתמטיקה. מאידך, אנו נוכחים לדעת כי לתפיסה לקויה זו יש שורשים עמוקים גם בקרב המורים. מכאן אנו מסיקים כי לא קל לשנות תפיסה זו. לפיכך, אנו מוצאים בנאמר חיזוק לדעתנו כי יש להקדיש מאמץ משמעותי ומתמשך לשכנוע תלמידי ההוראה בחשיבות של שינוי התפיסה. חשוב, לדעתנו, שמאמץ כזה ילווה בהדגמות המציגות את הבעיות שיוצרת תפיסה לקויה זו, בהוראת המתמטיקה.

טענה שניה: הדרישות ה״קפדניות״ לניסוחים מדויקים ״הורגות״ את החשיבה ואת האינטואיציה.

טענה זו מציגה ערבוב בין שני עניינים שונים. אין להסיק כי היכולת להתנסח במדויק באה במקום החשיבה האינטואיטיבית. נהפוך הוא: יכולת זו אמורה להשלים את החשיבה האינטואיטיבית. חשיבתנו מטבעה היא אינטואיטיבית, וכאשר אנו חושבים על בעיה, החשיבה האינטואיטיבית מיד נכנסת לפעולה, וטוב שכך. אולם החשיבה האינטואיטיבית עם כל עצמתה אינה חשיבה סדורה, והיא נוטה לשגיאות, דילוג על פרטים, ערפול משמעות של מושגים וכיוצא באלו. לפיכך, התהליך של רישום מדויק ומסודר של הפתרון (אליו הגענו קודם לכן תוך שימוש בחשיבתנו האינטואיטיבית) מהווה מנגנון יעיל לביקורת ולניפוי שגיאות. גם מתמטיקאים מקצועיים יכולים להעיד על מקרים אין ספור שבהם היו בטוחים שהגיעו לפתרונה של בעיה, כאשר השגיאה בפתרון התגלתה רק בשלב של הניסוח המוקפד יותר של הפתרון. חשוב לציין כי צעידה כזו

בשלבים, של העלאת רעיונות ותיקונם לאחר ביקורת מהווה הליך חשיבה יעיל ומועיל שאין לו תחליף. זו הסיבה שאנו חוזרים וממליצים לתלמידנו לאמץ את ההרגל לשימוש בדפי טיוטה. העבודה על טיוטה היא יותר חופשית, ובה אנו יכולים לקרוא דרור לדמיוננו ולקשקש ולמחוק כרצוננו. רק לאחר שהגענו למסקנה כי פתרון בידנו ניגש לכתיבה מוקפדת של הפתרון, שתאפשר לנו גם לבקר את עבודתנו וגם להוציא מתחת ידינו עבודה מדויקת ברורה ונוחה לקריאה.

טענה שלישית: הרי גם המדריכים והמפקחים שלנו אינם דורשים מאתנו הקפדה כזו. הגזמתם.

אכן טענה זו מציגה בעיה קשה. הרי המערכת עצמה מכתיבה לימוד שלדעתנו לא ראוי, ולפיכך יכולה לעלות טענה בסגנון: ״מדוע אנו נדרשים ללמוד ולהטמיע דברים אותם איננו אמורים ללמד? תקנו קודם כל את המערכת, לפני שתדרשו מאתנו ללמוד דברים שהם לכאורה מיותרים במצב הקיים״. לדעתנו, כבר הדוגמאות שהבאנו קודם נותנות תשובה חלקית לטענה זו. אפילו דוגמאות מעטות אלו, שהתרכזו בעיקר בנושא של הבנת משמעות מושגים והיכולת להתנסח באופן בהיר ומדויק, מראות כיצד חוסר שליטה בנושאים אלו עלול להביא למצבים בהם הלימוד לא ראוי ומדכא את עצמאות החשיבה. על כך נוכל להוסיף, כי כל מורה נדרש להתמודד באופן שוטף עם אתגרים חדשים הנובעים משינויים בתכניות הלימודים, שאלות מאתגרות של תלמידים, הצורך לבנות דרכי הסבר מתאימות לנושאים קשים וכיוצא באלו. מורה יכול להתמודד באופן נאות עם כל אלו רק אם שליטתו בנושאים הנלמדים רחבה ומעמיקה הרבה מעבר למה שנדרש מתלמידיו.

טענה רביעית: הרי אי אפשר לדרוש דרישות כאלו מתלמידי בתי הספר (בטח לא מתלמידי בית הספר היסודי). אז מדוע מוצגות בפנינו דרישות כאלו לגבי נושאים שאיננו אמורים ללמד או להקנות?

הרישא של הטענה מוצדקת לחלוטין. הרי ידוע כי יכולתם הקוגניטיבית של ילדי בית הספר היסודי רחוקה מאוד מהיכולת של מבוגר, ועל אחת כמה וכמה כשמדובר ביכולת לחשיבה מופשטת (ראו למשל, פליבל, 1970). אולם הסיפא של הטענה מציגה אי הבנה

בסיסית. הצורך בידיעה והבנה מעמיקות של המורה נועד לשיפור תהליך ההוראה. כבר במעט הדוגמאות שהוצגו קודם נוכחנו כיצד חוסר מיומנות ומודעות של המורה לגבי הבנת מושגים וניסוח ראוי יכול להביא לתקלות ולדיכוי החשיבה העצמאית אצל תלמידים. אין לכך כל קשר לדרישות שיוצגו לתלמידים לגבי ניסוח והבנת מושגים (שכמובן חייבות להיות נמוכות מהנדרש מהמורה).

ובהקשר זה נציין עובדה מעניינת (או "מוזרה") לגבי ניסוח ראוי. בדומה למתרחש בתחום המתמטיקה, איננו מצפים מתלמידי בתי הספר היסודי להגיע לרמות שמעבר ליכולתם ביכולת הניסוח בשפת אמם. לעומת זאת, אנו מצפים בהחלט כי שפתם של המורים ללשון תהיה איכותית, מעל ומעבר לאיכות השפה של תלמידיהם. הרי שפה עילגת של מורה תשפיע ללא ספק על איכות ההתבטאות של תלמידיו בעתיד. לפיכך, אם נצפה במורה ללשון או לעברית ששפתו עילגת, נזדעזע. מאידך, דווקא בתחום המתמטיקה, שבו החשיבות של הניסוח הנכון והמדויק היא הגבוהה מבין כל המקצועות הנלמדים, איננו נרעשים מהתנסחות עילגת של מורה (מהבחינה המתמטית, כמובן), כל עוד הוא מסוגל להעביר כראוי את המתכונים ליישום של פרוצדורות מסוימות. אכן, עולם הפוך.

לסיכום הדברים נציין, כי מועלות הסתייגויות דומות לאלו שנדונו כאן גם לגבי נושאים נוספים הקשורים להכשרת מורים. גם כאן ניתן להעלות נימוקים ודוגמאות שיבהירו את העניין באופן דומה למה שנעשה בפרק זה. מפאת קוצר היריעה לא נרחיב על אלו את הדיבור.

ונסיים בהערה שנראית חשובה בעינינו. קשה מאוד להגיע להכרה בחשיבות של הלימוד המעמיק אותו מציג הספר. לכן, הדיון בנושא זה של לימוד מעמיק צריך להיות מתמשך ורציף לאורך כל תקופת ההכשרה של המורים, תוך דיון בדילמות ודוגמאות בדומה למה שהצגנו בפרק זה. חשוב שדיון זה לא יצטמצם אך ורק לשלב ההכשרה, אלא שהמורים יהיו חשופים אליו לאורך כל תקופת עבודתם כמורים. לפיכך חשוב גם שתכתב ספרות מתאימה על הנושא. יתירה מזו, ממבט על תכניות הלימודים ודרך הלימוד בבתי הספר, ברור לנו כי לאותו דיון חייבים להיות חשופים כל הגורמים, מראשי המערכת ועד אחרון פרחי ההוראה.

ה. הבעיה של שיטות הלימוד

לפני שנים רבות סח פיזיקאי באזני אחד מאתנו את התובנה הבאה. את הבעיה בלימודי המתמטיקה בבתי הספר ניתן למצות באות הלטינית x. הכיצד? שאל ומיד ענה: בכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי, מתבקשים התלמידים לפתור את התרגיל 3+?=8. הם מיד מציבים 5 במקום סימן השאלה ועוברים לתרגיל הבא. אולם כשהם מגיעים לכיתה ז׳, והמורה כותבת על הלוח את התרגיל 3+x=8, כל התלמידים נכשלים בפתרון התרגיל. אכן כוחה של הפשטה! בלי להתייחס לשאלה עד כמה הסיפור משכנע (הרי אי אפשר לתלות את כל הבעיות של לימודי המתמטיקה במקור אחד) הוא מציג בעיה אמתית. הרי הסימנים ? ו־x ממלאים את אותו התפקיד בשני התרגילים, רק שהשימוש בראשון ממחיש את מהות הבעיה, והשני מציג את הבעיה באופן מופשט ולפיכך מבלבל וקשה לתפיסה. לפיכך תעלה השאלה, מה טעמו של אותו x, האם רק לבלבול נועד? התשובה על כך שלילית. אותם תלמידים יעברו במשך לימודיהם למשוואות מסובכות בהרבה מאותה משוואה פשוטה 3+x=8, ושם כבר נוח יותר להשתמש באותיות, מה גם שבמשוואות מעין אלו יכולים להופיע נעלמים רבים שלצורך ייצוגם נדרשים סימונים שונים, ואותיות יש הרבה, בעוד שסימן שאלה יש רק אחד. בהמשך הלימוד, כשמסתבכות המשוואות, אנו נצרכים לשיטות פתרון, העברות אגפים, פירוק לגורמים, ושאר מרעין בישין. וזה המקום בו מתחילים התלמידים להתבלבל באמת. בדיון שלנו, נצטמצם רק לפעולה של העברת אגף ביחס לחיבור, ונדגים את הפעולה על תרגילנו 3+x=8. מה שיתבצע בפתרון תרגיל זה הוא כדלקמן: נעביר את ה־3 מאגף שמאל של השוויון הנתון לאגף הימני, תוך כדי כך שנעניק לו את הסימן מינוס, ונקבל: x=8-3, והנה, מעשה נסים, הפתרון 8-3=5 נמצא בידינו. נשאל כעת את השאלה: כיצד מסבירים לתלמיד את הסיבה לנכונות התהליך.

כעת נביא סיפור ששמענו מעמית שלימד בצעירותו במכינה ל־3 יחידות במתמטיקה באחת האוניברסיטאות. מדובר על דיון שהיה לאותו עמית עם חבר, שהיה מורה למתמטיקה באחד מבתי הספר האקסטרניים, בעניין הלימוד של אותה העברת אגפים. אני, סח

עמיתנו לחברו, ממשיל שוויון מהסוג $3+x=8$ למאזניים שעל הכף השמאלית שלהם מונח הביטוי $3+x$ ועל הימנית המספר 8. הואיל שבשוויון מדובר, המאזניים מאוזנים. אנו יודעים כי המאזניים יישארו מאוזנים אם נוסיף על כל אחת מכפותיהן את אותה הכמות (‎-3 למשל). לפיכך יישמר האיזון (השוויון) אם נוסיף ‎-3 לשני אגפי השוויון, כך שתתקבל התוצאה $x=8-3$ ששווה ל־5 שהוא הפתרון הדרוש. האם נאה ההסבר בעיניכם? אנו חושבים שהסבר מסוג זה יכול להמחיש את הסיבה לנכונות הפעולה באופן סביר. אולם החבר פסל את ההסבר, וטען כי הוא אינו עוזר בפועל לתלמידים בביצוע של אותה העברת אגפים, וטען: אם אתה רוצה שתלמידים יזכרו כיצד לבצע פעולה, בלי לטעות בביצועה, עליך לכרוך את ההסבר בסיפור מתאים.

להלן סיפורו של החבר. אני מספר לתלמידים, אמר החבר, כי אגף שמאל של השוויון הוא הבית של ה־xים, ואגף ימין הוא הבית של המספרים. בפתרון כל משוואה עליכם להביא כל אחד לבית שלו. אך יש לזכור, מי שלא נמצא בביתו ראוי לעונש. ומה העונש החמור ביותר שניתן להעניק למספר? מינוס! ולכן בפתרון המשוואה כל שעליכם לעשות הוא להזיז כל אחד לביתו, ולא לשכוח להענישו במינוס. אכן סיפר נאה! בוודאי נאה יותר מההסבר עם המאזניים. מקובלת עלינו עדותו של אותו מורה כי סיפור זה עוזר לתלמידים לבצע את הפעולות ללא בלבול וכי הוא יעיל יותר מסיפורי מאזניים למיניהם. יתירה מזו, כשבירנו עם מורים, התברר לנו כי דרך לימוד זו פופולרית למדי, ועוזרת לתלמידים, ולא רק בלימודים ל־3 יחידות (לפחות כך היה לפני מספר שנים).

אך יש הבדל נוסף בין הסיפורים. בעוד שסיפור המאזניים נותן הסבר להגיון שמאחורי אותה העברת אגף, הרי מי שמתרגל לסיפורים מהסוג השני יסתגל עד מהרה למצב שבו אין לו כל צורך לגלות עניין בסיבתם של דברים. ולכן, לדעתנו, זו דרך לימוד שאמנם נאה מאוד, אך גם גרועה מאוד.

מעבר לגינוי של אותה שיטת לימוד, חשוב להתחקות אחר מקורותיה. בדיקה זו של מקורות השיטה תעלה כי אותה שיטה היא מעין "מעקף" שמצאו מורים (וביניהם גם גיבור סיפורנו) שנועד

לעזור בהתמודדות עם בעיות מהותיות בתכנית הלימודים; רבים מתלמידיו של אותו מורה בבית ספר אקסטרני היו במין מצב של הזדמנות אחרונה. הם הגיעו לבית הספר האקסטרני לאחר שלא הצליחו בבית הספר הרגיל, והיו זקוקים לתעודת בגרות. לשם כך היה עליהם לעבור את מבחן הבגרות במתמטיקה, ובו נדרשו ללמוד פתרון משוואות ושאר עניינים (כמו חישוב נגזרות ואינטגרלים), נושאים שמן הסתם לא יפגשו עוד בהמשך חייהם. מבחינתם, אותו מורה היה קרש הצלה (ומן הסתם כך ראה המורה את עצמו): השרות הטוב ביותר שיכול היה לתת לתלמידים אלו הוא ציון עובר בבחינת המתמטיקה ל־3 יחידות. ואם נמצא כי הדרך היעילה להשגת המטרה כרוכה בשימוש בשיטות שערכן הלימודי מפוקפק, מה לנו כי נלין על אותו מורה?

סיפור זה מעלה מספר בעיות.

1. תלמידים שמתמטיקה אינה ״כוס התה שלהם״ נדרשים, ללא כל צורך אמתי, להתמודד עם בעיות שמורכבות מדי בשבילם, תחת עומס לימודים שהוא גדול מדי.
2. לכן, לא נותרת למוריהם ברירה אלא לחפש כל מני מעקפים בדמות בתים ועונשים.
3. ואותה שיטה לא נאותה של בתים ועונשים זולגת גם ללימודי הבגרות ב־4 ואף 5 יחידות. ומדוע? כי גם שם נדרשים התלמידים להתרכז בעיקר ביישום פרוצדורות. למיטב זיכרוננו לא חזינו בבחינת בגרות במתמטיקה שבה נדרש התלמיד להציג הגדרה של מושג אותו למד, או לתת הסבר לנכונותו של תהליך אותו למד. לפיכך יתמקד אותו תלמיד בשינון ותרגול של פרוצדורות. וחבל. כי כשיגיעו אותם תלמידים ללימודי המדעים המדויקים וההנדסה באוניברסיטה, הם עלולים להידרש להסברים כאלו בבחינות, כאשר הם לא נדרשו קודם לכן להתמודד עם דרישות מסוג זה בבית הספר.

מכאן אנו נוכחים עד כמה יקשה על מורה למתמטיקה ללמד לימוד ראוי. יש עומס של חומר, ועליו להכין את תלמידיו לבחינות (בגרות אם מדובר בתיכון, ומבחני מיצב ואחרים בבתי הספר היסודיים). ובבחינות נדרש התלמיד למעט מאוד הבנה, ולכן מורה שידגיש את

אותה הבנה, "יבזבז" זמן שנדרש להכנה לבחינות. לפיכך, לא נותרה ברירה בידו אלא להיצמד לפרוצדורות.

וחזרה לספר שבו אנו דנים. הקורא של פרק זה עלול להגיע למסקנה המוטעית כי כל שנאמר למעלה מייתר את ספרו של קופרמן. אנו דוחים מסקנה זו מכל וכול. גם בדיון קודם, וגם מהדוגמאות שניתנו בפרק ד, לא קשה להיווכח כי בכל שיטת לימוד, נאותה יותר או פחות, שליטתו של המורה בחומר חשובה. גם בלימוד שמתבסס על פרוצדורות עדיין יש למורה מה לתרום (או לקלקל, כפי שראינו בדוגמאות מפרק ד).

נסיים פרק זה בהערה לגבי הפרוצדורות. נראה שאנו חייבים להן התנצלות על השם הרע שהוצאנו להן במאמר זה. כל תהליך לימוד במתמטיקה כרוך גם בלימוד של פרוצדורות. לאותן פרוצדורות (שמהוות מעין "מתכונים" לפתרון בעיות) יש חשיבות במתמטיקה ויש לתרגל את ביצוען. הבעיה מתחילה ברגע שמימוש הפרוצדורות הופך לחלק המרכזי של הלימוד, ומפניו נדחים העקרונות, ההסברים, הדרישות לכתיבה נאותה, ודומיהם.

ו. מי צריך ללמוד מתמטיקה, וכיצד עליו ללומדה

הסיפור מהפרק הקודם מביא אותנו לשאלה: מי צריך ללמוד מתמטיקה. טענה שמועלית תדיר היא כלהלן: הרי רוב האוכלוסייה אינה נצרכת בחיי היום יום שלה לידע מתמטי מעבר לזה הנלמד בבית הספר היסודי, וגם על חלק ממנו ניתן לוותר. מוטב להרחיב את לימודי המתמטיקה רק לאותו מיעוט שיזדקק בהמשך ללימודים אלו, ואת האחרים (שבמקומותינו רבים מהם חברים באותה אוכלוסייה שכורעת תחת הנטל של לימודי המתמטיקה ב־3 יחידות, למרות שאינם מעוניינים ואינם מוכשרים ללימודים אלו) נניח לנפשם. יסתפקו אלו בלימוד פרוצדורות הנלמדות בעיקר בבית הספר היסודי, ודי יהיה להם בכך.

אין בכוונתנו להרחיב או להיכנס לפולמוס בעניין רחב יריעה זה (ראו דיון קצר ומעניין בנושא, עם כמה מראי מקום ב־וינר, 2014). אנו נתייחס רק לקישור (שאינו מקובל עלינו) בין לימוד שהיקפו מצומצם ללימוד שהוא פרוצדורלי ושטחי. לצורך זה נעלה את

טענתנו, כי כל לימוד ראוי אינו נמדד רק ב"מה שהלומד זוכר", אלא גם, ובדרך כלל בעיקר, **בחוויה שהתלמיד עובר, ובתובנות וההרגלים שרכש.** ואין זה משנה על איזה מקצוע לימוד מדובר, ומה היקפו של אותו לימוד. ולכן נשאל: האם עדיף שהחוויה שיעבור התלמיד תכלול רשמים של פתיחות, הצגת שאלות ודיון בהן, חשיבה עצמאית, וכיוצא בזה, או רשמים של לימוד נוקשה, שבו לא שואלים שאלות אלא ממלאים הוראות ועושים בדיוק את "מה שהמורה רוצה שנעשה"?

ז. מלות סיכום

תחילתו של מאמר זה בהצגה של ספר שנועד להכשרת מורים במתמטיקה, וממנו הגענו לדיון בסוגיה של מהותו של לימוד ראוי. מכאן נוכחנו כי אם בלימוד ראוי חפצה נפשנו, הרי אנו עומדים בפני תנאים המקשים מאוד על לימוד כזה. קיים כאן מין ניגוד: ספר ראוי מצד אחד, אך השימוש בו אינו פשוט ומחייב זהירות מן הצד השני. תופעה זו אינה מקרית; היא נובעת מקיומם של ניגודים לא מעטים שקיימים במערכת החינוך (שעל חלקם עמדנו בפרקים הקודמים).

כבר במערכות להכשרת המורים אנו חוזים בקיומו של ניגוד מעין זה. ההכשרה מתנהלת בשני מישורים; מצד אחד, לימודי הדיסציפלינה עצמה, שמועברים ברובם על־ידי מתמטיקאים שלרובם אין שמץ של מושג על הלימודים בבתי הספר, וממולם לימודי ההוראה שמועברים על־ידי אנשי הפדגוגיה, במנותק מהמומחים בדיסציפלינה. אנשי כל קבוצה מלמדים את מה שהם יודעים, וכושלים במה שאינם יודעים, כאשר הקשר בין הקבוצות (למניעת אותם הכשלים), מינימלי עד לא קיים.

מהאמור לעיל אנו מגיעים לניגוד נוסף; קיימת הטענה, אותה אנו מציגים גם במאמר זה, כי הבנה מעמיקה של החומר אותו הם מלמדים חשובה לאיכות ההוראה של המורים. מאידך, קיימת הדעה כי אין מחקרים המראים באופן חד משמעי שידע רב יותר של מורים משפר את הישגי תלמידיהם. יש להזהיר כאן מפני בלבול; אם מטרת הלימודים היא להקנות לתלמידים **שליטה והבנה בחומר הלימוד**, ידע מעמיק של המורים הוא חיוני. מאידך, אם ההערכה של הישגי

התלמידים מתבססת על מבחנים בהם נבדקת בעיקר **השליטה של התלמידים ביישום של פרוצדורות**, תמונת המצב שונה, ובהתאם לכך ייתכן וישתנו המסקנות.

מכאן יכולה לעלות הטענה כי נדרשת רפורמה לתיקון המצב, ומוטב שעה אחת קודם. אולם רפורמות רבות הקשורות לענייננו כבר הוצעו, רבות מהן מתוך כוונה טובה, ורובן (ככולן) נפתחו בקול תרועה רמה ונכשלו בקול דממה דקה. וכך עולה בפנינו שוב ניגוד: נדרשת רפורמה, אך המערכת גדולה וכבדה מדי. במערכת כזו לא ניתן לבצע מהפך בן יום (וגם לא בתוך שנה או אפילו מספר שנים). אולם ניתן לנסות ולשנות באופן הדרגתי, צעד אחר צעד (ראו דיון בעניין זה ב־לב, 2015a). האם ניתן להביא לשינוי בסופו של דבר? אנו מקווים שניתן (בפינלנד למשל, נראה לנו ששיפרו).

נסיים בניגוד נוסף (והפעם בניגוד ממין אחר, שלדעתנו הוא ניגוד רק לכאורה). כל הדיון הזה בעניין לימודי המתמטיקה מתנהל במאמר שהוזמן על־ידי כתב עת שעוסק במדעי הרוח והחברה. וישאל השואל על שום מה? לא שאלנו את העורך, אך לא נתפלא אם בתשובתו יטען שעיקר הסוגיות והבעיות שעלו כאן בעניין לימוד המתמטיקה, הן סוגיות רחבות יריעה, שרב להן המשותף גם עם לימוד הדיסציפלינות האחרות, כולל אלו המשתייכות למדעי הרוח והחברה.

רשימת מקורות

אהרוני ר. (2004). *חשבון להורים – ספר למבוגרים על מתמטיקה של ילדים*, שוקן.

אמסטרדמסקי ש. (2015). "לרוב המורים ביסודי יש חרדת מתמטיקה, זו נקודת מוצא קשה", כתבה ב"כלכליסט", 7.10.2015.

ארטשטיין צ. (2014). *הקשר המתמטי – המתמטיקה של הטבע, הטבע של המתמטיקה, והזיקה לאבולוציה.* ספרי עליית הגג, ידיעות אחרונות, ספרי חמד.

גרינספלד חוה ואלקד-להמן אילנה (2008). *בשבילים, בדרכים, בצמתים – סיפורים על דרכי התפתחות מקצועית ועל שינוי תפיסתי*. מכון מופ"ת.

וינר ש. (2014). "למה אפשר לצפות ממי שמלמד מתמטיקה בבית הספר היסודי". מתוך *המורה למתמטיקה – מאפייני הכשרה, ידע, הוראה ואישיות של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי*, עורכים: דורית פטקין ואביקם גזית, 14-40, מכון מופ"ת.

לב א. (2013). "על הרחבת הנגישות להשכלה הגבוהה וצמצום הפערים בחברה", *קתדסיס* 19, 8-17.

לב א. (2015a). "על חינוך, חשיבה מסדר גבוה וחשיבה בהירה", *קתדסיס* 22, 48-107.

לב א. (2015b) "הערה למאמרו של ירון ונסובר: 'דקה, ממש דקה, כמו דף רשימת מכולת: היסטוריה דו־מימדית בכיתה'", *קתדסיס* 23, 63-64.

עופרן מ. (2005). *שליש לחלק לרבע – המחשבה שמאחורי החישוב*. רכס.

פליבל ג'. (1970). *הפסיכולוגיה ההתפתחותית של ז'אן פיאז'ה*. תל אביב: אוצר המורה.

שריקי ע. ופטקין ד. (2014). "כיצד תופסים מורים למתמטיקה את צרכיהם המקצועיים?". מתוך *המורה למתמטיקה – מאפייני הכשרה, ידע, הוראה ואישיות של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי*, עורכים: דורית פטקין ואביקם גזית, 187-230. מכון מופ"ת.

Ausubell. D. (1968) *Educational psychology: A cognitive view*. Austin, Tx: Holt, Rinehart and Winston.

Edwards B. S. and Ward M. B. (2004) "Surprise from Mathematics Education Research: Students (mis)use of Mathematical Definitions", *The American Mathematical Monthly*, *111*, 411-424.

Vigotsky, L. (1986) *Thought and language* (A. Kozulin, Ed.), Cambridge, MA: MIT Press.

Vinner. S. (1997) "The Pseudo-conceptual and the Pseudo-analytical Thought Processes in Mathematical Learning", *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 97-129.

Vinner. S. (2011) "What Should we Expect from Somebody who Teaches Mathematics in Elementary Schools". In J. Novotna & H. Moraova (eds.), *The Proceedings of the International Symposium on Elementary Math Teaching at Charles University* (SEMT 11), Prague, August 21-26 2011 (31-43).

רומינה זיגדון, בית הספר למדעי המחשב, המכללה האקדמית של תל אביב יפו, תל אביב. rominazi@mta.ac.il

אריה לב, בית הספר למדעי המחשב, המכללה האקדמית של תל אביב יפו, תל אביב. arieh@mta.ac.il