# תוכן העניינים

# הקדמה

**קורא יקר,**

הספר "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי במשתנים אחדים" הוא אחד התוצרים של פרויקט רב שנתי, המתקיים במכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה בנושא למידה פעילה.

פרויקט זה בוצע במסגרת ה"קול הקורא השני" של המועצה להשכלה גבוהה לפיתוח טכנולוגיות למידה. אנו תקווה, כי הניסיון המוצלח שרכשנו בתכנון ובהפעלה של קורסי למידה פעילה יעודד גם מוסדות להשכלה גבוהה אחרים לאמץ גישה זו.

מחקרים בהוראת המדעים מראים, כי הפעלתם של סטודנטים בהרצאות של קורסי יסוד באקדמיה חשובים ביותר להבנת החומר הנלמד. כדי ליישם מסקנות אלה חשוב לשלב את הסטודנטים בתהליך הלמידה ולהעביר אליהם חלק מנטל האחריות. בתהליך הלמידה המתקיים במכללתנו, הסטודנטים מתנסים, בין היתר, בעבודה בקבוצות ובתהליך שמעורר חשיבה ביקורתית.

הספר "חשבון דפרנציאלי ואינטגרלי במשתנים אחדים", שנכתב ע"י מרצי המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה, מכיל חומר תיאורטי ושאלות לשימושם של הסטודנטים וכן כספר עזר למרצה. השאלות בספר נבחרו בקפידה רבה, כך שהן מכוונות למגוון רמות לימוד. כמו כן, כולל הספר תקליטור ובו הדגמות רבות לשימושם של הסטודנטים.

בהזדמנות זו, אני מבקש להביע את הערכתי ותודתי לצוות הכותבים: ד"ר לודמילה שוורצמן , ד"ר מרים ברזינה וד"ר בומה אברמוביץ, וכן להודות לד"ר דודו פונדק ראש היחידה לתקשוב בהוראה, עבור הובלת הפרויקט המכללתי.

ד"ר שמריהו רוזנר
נשיא המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה.

# דברי המחברים

ספר זה מיועד לסטודנטים, הלומדים חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של משתנים אחדים ואנליזה וקטורית (קורסים כגון: חדו"א 2, חדו"א 2מ, חדו"א 2ת, אינפי' 2 וכו') במוסדות השונים להשכלה הגבוהה. הקורס מהווה קורס המשך של קורס בנושא חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של משתנה אחד. בקורס זה, בנוסף לפונקציות של מספר משתנים, נלמדים נושאים נוספים הקשורים למקצועות המתמטיים הבאים: "אלגברה וקטורית", ו"גיאומטריה אנליטית". החלק הראשון של הספר משלים ומעבה את חומר המקצועות הנ"ל, וששת החלקים הבאים מהווים את לב ליבו של הספר. הספר מיועד ללמידה עצמית באמצעות פתירת שאלות. אנו ממליצים לא לגשת לפתירת השאלות, בטרם ילמדו הסטודנטים את החומר התיאורטי, לכן כל פרק מתחיל בתקציר חומר זה. אנו מביאים הגדרות ומשפטים ומלווים אותם בהסברים נוספים ודוגמאות רבות.

בספר ישנן כ־350 שאלות משלושה סוגים: שאלות עם פתרון, שאלות ללמידה עצמית ושאלות להעמקה ומושגיות. השאלות מיועדות, בעיקר ללמידה עצמית של הסטודנטים. אנו ממליצים תחילה, לנסות לפתור את השאלות באופן עצמאי. אם הלומדים ייתקלו בקשיים, הם יוכלו לפנות לפתרון המלא. השאלות להעמקה מיועדות לתרגול נוסף, לאחר פתירת השאלות לעבודה עצמית.

לספר זה מצורף תקליטור, המכיל כ־200 קבצים עם שרטוטים והדגמות. רוב הקבצים הם בפורמט של תוכנת DPGraph. התוכנה מיועדת לבניית משטחים במרחב, ומאפשרת ללמוד את המשטחים באמצעות כלים פשוטים לשימוש: ניתן לסובב משטח ולראות אותו מכל נקודת ראיה, ניתן לחתוך משטח ע"י כל מישור, המקביל למישור הקואורדינאטות וניתן לראות שינוי משטח, תוך כדי שינוי הפרמטרים. בנוסף לכך, התוכנה מאפשרת לבנות עקומים במישור ובמרחב ואף לשרטט שדה וקטורי.

את כל הקבצים ניתן לראות באמצעות גרסת DPGraphViewer, הנמצאת בשימוש חופשי:
http://www.dpgraph.com/graph–viewer.html.

אנו מקווים שהספר יהיה כלי עזר לסטודנטים, ושהספר יהיה מועיל גם למרצים ולמתרגלים.


## תודות

הספר נכתב במסגרת הפרויקט "למידה פעילה ושיתופית". אנו מודים לראשי הפרויקט: ד"ר דוד פונדק, ד"ר שמרהו רוזנר ופרופ' דוד שוחט, שתמכו בנו בניסיוננו לחדש את שיטות ההוראה ודרכיה. כתיבת הספר היא פועל יוצא של הפרויקט.

ברצוננו להודות לפרופ' שושנה אברמוביץ ופרופ' אברהם ברמן עבור ההערכה המדעית.

תודה לשני חברי הסגל של מחלקתנו: ד"ר אלכס גולדוורד וד"ר לביא קרפ, שהעלו את הרעיון להיעזר בתוכנת DPGraph. התוכנה הפכה לכלי טכנולוגי חשוב בהוראתנו, ועל כך תודה ליוצר התוכנה David Parker.

תודה מיוחדת לשתי הקולגות שקראו ובחנו את הספר מתחילתו ועד סופו:
גב' רעיה קרדמן וגב' מיכאלה רוזנבלט.

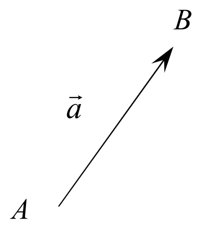

**המחברים**

# חלק 1: וקטורים, עקומים ומשטחים
## פרק 1.1: וקטורים

## חומר תיאורטי ודוגמאות

**הגדרה 1.1.1 : וקטור**

וקטור הוא קטע בעל אורך וכיוון : אם כיוון הווקטור הוא מנקודה $A$ לנקודה $B$, אזי $A$ היא זנב הווקטור, ו-$B$ היא ראש הווקטור.




**איור 1.1.1**

מסמנים את הווקטור ב- $\overrightarrow{AB}$ . אורך הווקטור הוא אורך הקטע : $AB = |\overrightarrow{AB}|$.

וקטור בעל אורך אפס נקרא וקטור האפס : $\overrightarrow{AA}$ .

**הערה**

שני וקטורים $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{CD}$ בעלי אותו אורך ואותו כיוון נקראים שווים. ז״א : וקטור לא משתנה אם מפעילים עליו טרנספורמציית הזזה. הוקטורים האלה נקראים חופשיים. לכן וקטור הוא אוסף קטעים מכוונים עם אותו אורך ואותו כיוון. נסמן וקטורים באותיות לטיניות קטנות עם חצים למעלה : $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , ... . כל קטע מכוון $\overrightarrow{AB}$ השייך לאוסף הקטעים $\vec{a}$ מייצג את הווקטור. כותבים : $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

נסמן את וקטור האפס ב- $\vec{0}$ .

**הגדרה 1.1.2 : וקטור נגדי**

אם $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , אזי וקטור $\overrightarrow{BA}$ מייצג וקטור נגדי. נסמן את הווקטור הנגדי ב- $-\vec{a}$ .

**הערה**

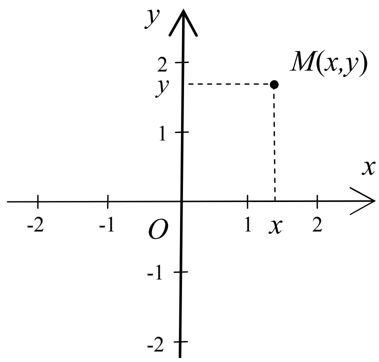
לוקטורים נגדיים יש אותו אורך, אך הכיוונים שלהם מנוגדים.

הטענה הבאה נכונה : $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{a}$.

## מערכת צירים קרטזית והצגה אלגברית של וקטור

### מערכת צירים קרטזית במישור

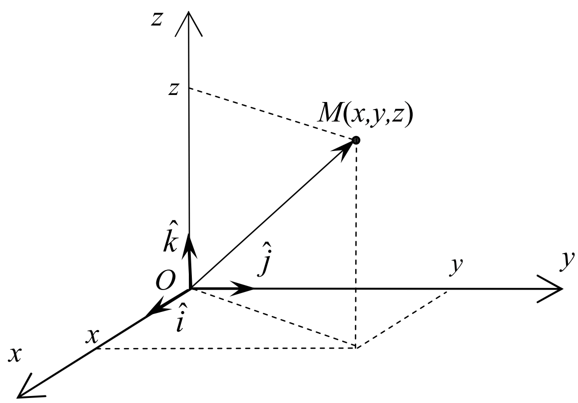
נבחר במישור נקודה מסוימת $O$ (הראשית) ושני צירי המספרים ניצבים זה לזה. ציר אחד נקרא ציר ה- $x$ , והציר השני נקרא ציר ה- $y$ . כל נקודה $M$ במישור היא בעלת שתי קואורדינאטות $(x, y)$ . הקואורדינאטות מגדירות את הנקודה באופן חד-משמעי, לכן כותבים $M(x, y)$ . ראו את האיור :




**איור 1.1.2**

## מערכת צירים קרטזית במרחב

נבחר במרחב נקודה מסוימת $O$ (הראשית) ושלושת צירי המספרים הניצבים זה לזה הם צירי הקואורדינאטות.
ציר אחד נקרא ציר ה- $x$ , הציר השני נקרא ציר ה- $y$ והציר השלישי נקרא ציר ה- $z$ הצירים יוצרים שלושה מישורי קואורדינאטות : $xy$ , $yz$ , $xz$. ראו את האיור :




**איור 1.1.3**

כל נקודה במרחב בעלת שלוש קואורדינאטות $(x, y, z)$. הקואורדינאטות מגדירות את הנקודה באופן חד-משמעי, לכן כותבים $M(x, y, z)$ .

## קואורדינאטות וקטור – הצגה אלגברית

אם נקודת הזנב של $\vec{a}$ נמצאת בראשית, אזי הווקטור מוגדר היטב ע״י נקודת הראש $M$ .
נקודה $M$ מוגדרת באופן חד-משמעי ע״י קואורדינאטות $(x, y, z) = (x_M , y_M , z_M)$. מכאן, שלושת המספרים הללו מגדירים היטב את וקטור $\vec{a}$ והם נקראים קואורדינאטות הווקטור. רושמים : $\vec{a} = (x, y, z)$ . זאת <u>הצורה האלגברית</u> של וקטור $\vec{a}$ .
באמצעות קואורדינאטות הווקטור ניתן למצוא את אורכו : אם $\vec{a} = (x, y, z)$ , אזי

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

יהיו $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, אזי $\vec{a} = \vec{b}$ אם ורק אם

$$x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2 \ , \ z_1 = z_2$$

**❑ דוגמה**

$\vec{0} = (0,0,0)$

וקטור בעל קואורדינאטות $(1,0,0)$ הוא וקטור היחידה בכיוון של ציר ה- $x$. מסמנים את הווקטור ב- $\hat{i}$. סימן "הכובע" מעל הווקטור מסמן שאורך הווקטור שווה ל- 1.

וקטור בעל קואורדינאטות $(0,1,0)$ הוא וקטור היחידה בכיוון של ציר ה- $y$. מסמנים את הווקטור ב- $\hat{j}$.

וקטור בעל קואורדינאטות $(0,0,1)$ הוא וקטור היחידה בכיוון ציר ה- $z$. מסמנים את הווקטור ב- $\hat{k}$.

ראו את האיור 1.1.3 .

**☑ הערה**

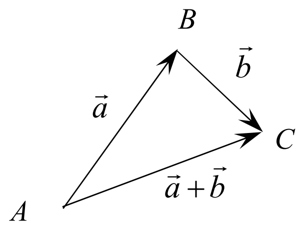
ניתן לבחור מערכת צירים בעלת שני צירים עבור וקטורים הנמצאים במישור. במקרה הזה, הקואורדינאטות של הווקטור הן זוג סדור של שני מספרים: $\vec{a} = (x, y)$.

## פעולות ליניאריות מעל וקטורים

### חיבור וקטורים

**✎ הגדרה 1.1.3 : חיבור וקטורים**

יהיו וקטורים $\vec{a}$, $\vec{b}$. נעביר את וקטור $\vec{b}$, כך שזנבו יתלכד עם ראש וקטור $\vec{a}$: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. הווקטור שזנבו מתלכד עם זנבו של $\vec{a}$ וראשו מתלכד עם ראשו של $\vec{b}$ הוא וקטור הסכום: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.




**איור 1.1.4**

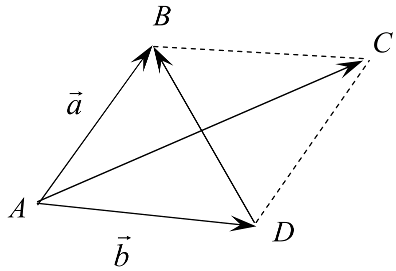
**☑ הערה**

דרך חיבור וקטורים ניתן להגדיר גם חיסור וקטורים: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

עבור וקטורים, אשר אינם מקבילים לאותו ישר, ניתן להגדיר את הפעולות באמצעות כלל המקבילית. אם נזיז את $\vec{a}$, $\vec{b}$ לנקודת התחלה משותפת ועל הווקטורים נבנה מקבילית, אזי וקטור האלכסון, שיש לו את אותה התחלה הוא וקטור הסכום: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

וקטור האלכסון השני שמחבר את סופו של $\vec{b}$ עם סופו של $\vec{a}$ הוא וקטור ההפרש: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB}$.

ראו את האיור:




**איור 1.1.5**

**משפט 1.1.1: תכונות ליניאריות**

לכל הווקטורים $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ מתקיימים:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

**הערה**

יהי וקטור $\vec{a}$ בצורה אלגברית: $\vec{a}=(x,y,z)$, אזי $\vec{a}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

אם $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ , $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, אזי $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

הנוסחה מגדירה את חיבור הווקטורים בצורה אלגברית.

**משפט 1.1.2: אי-שוויון המשולש**

לכל הווקטורים $\vec{a}$ , $\vec{b}$ מתקיימים: $|\vec{a}\pm\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

**הערה**

ניתן להוכיח כי $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ אם ורק אם הווקטורים הם בעלי אותו כיוון, או אחד מהם שווה לווקטור האפס.

## כפל וקטור בסקלר

**הגדרה 1.1.4 : כפל וקטור בסקלר**

יהיו וקטור $\vec{a}$ ומספר ממשי $\alpha$ .

וקטור $\alpha\,\vec{a}$ הוא וקטור בעל התכונות הבאות:

1) $|\alpha\,\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$

2) כיוונו של $\alpha\vec{a}$ הוא כיוון של $\vec{a}$, אם $\alpha>0$ ; כאשר $\alpha<0$ כיוונו של $\alpha\,\vec{a}$ הוא נגדי לכיוון של $\vec{a}$.

**דוגמה**

$$0\vec{a}=\vec{0}\ ,\ (-1)\vec{a}=-\vec{a}\ ,\ 1\vec{a}=\vec{a}$$

$$\alpha\vec{a}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}=\vec{0}\ \text{או}\ \alpha=0$$