

תוכן העניינים

7 הקדמה

9 תודות

חלק א – מספרים שלמים

- 13 פרק 20. כפל: חישוב בתחום מספרים לא-מוגבל
- 34 פרק 21. חילוק: חישוב בתחום מספרים לא-מוגבל
- 48 פרק 22. סדר פעולות החשבון
- 59 פרק 23. חילוק: שאריות
- 79 פרק 24. מספרים ראשוניים ומספרים פריקים
- 99 פרק 25. כפולה משותפת ומחלק משותף
- 110 פרק 26. סימני התחלקות
- 126 פרק 27. סדרות

חלק ב – שברים

- 145 פרק 28. שברים: הרחבת עולם המספרים
- 156 פרק 29. שברים: משמעויות מרובות וייצוגים מרובים
- 167 פרק 30. השוואה בין שברים
- 185 פרק 31. חיבור וחסור של שברים
- 203 פרק 32. כפל של שברים
- 227 פרק 33. חילוק של שברים

הקדמה

מתמטיקה של בית ספר יסודי חלק ב נכתב בעבור אלפי המורים המלמדים מתמטיקה בבתי ספר יסודיים בישראל, ולקהל ההורים המתמודדים עם הצורך להנחות את ילדיהם בצעדיהם הראשונים בלימודי המתמטיקה. מטרתו של חלק זה זהה למטרת חלק א שקדם לו: להקנות למורים (שבחלקם אף הם הורים) ולהורים (שהם למעשה סוג של מורים) ספרות נגישה ובהירה המפרטת את מגוון הנושאים המתמטיים הנלמדים בבית הספר היסודי.

כפי שציינתי בהקדמה לחלק א, ספר זה החל את דרכו כרשימות שכתבתי להשתלמויות של מורים בבתי ספר יסודיים בירושלים. הופתעתי אז לגלות שכמעט לא קיימת ספרות מתמטית בעברית שתוכל לעזור למורים להעמיק את ידיעותיהם במתמטיקה יסודית ומעבר לזה תחשוף אותם להתבוננות אחרת, מעמיקה ורחבה יותר על תחום התוכן שהם מלמדים.

החלטתי לכתוב ספר זה מפני שאני מאמין בנחיצותו. רוב רובם של המבוגרים שולטים אמנם במתמטיקה של בית ספר יסודי ברמה הנדרשת מבוגרי בית ספר, אבל מיומנות זו אינה מספיקה כדי להנחיל ידע לאחרים. מחקרים רבים מוכיחים שהוראה איכותית דורשת ממורים רמת ידיעות עמוקה באופן ניכר מזו הנדרשת מתלמידיהם. בנוסף לידע רחב, נדרשים יכולת אבחנה בין עיקר וטפל, חשיבה ביקורתית ובדיקה עצמית, חופש להסביר דבר אחד במגוון דרכים, זיהוי עקרונות משותפים בנושאים שונים, יכולת לבחור דוגמאות טובות, יכולת לזהות במהירות ובמדויק שגיאות של תלמידים והחשוב מכול בעיני – מודעות לכוח וליופי הטמונים בחומר הנלמד. יכולות מגוונות וחשובות אלה אינן באות יש מאין, ואחת הדרכים לרכוש אותן היא באמצעות ספרות ייעודית.

מבנה הספר ומטרותיו

בעוד חלק א של מתמטיקה של בית ספר יסודי דן בעיקר בנושאים הנלמדים בכיתות א ו-ב, תוך הנחת המושגים, הרעיונות והעקרונות הנדרשים בהמשך הלימוד, דן חלק זה, חלק ב, במרבית הנושאים הנלמדים בכיתות ג-ו, והוא מחולק לשני חלקים:

החלק הראשון, הכולל את הפרקים 20-27, עוסק באריתמטיקה של מספרים שלמים. הנושאים העיקריים הנלמדים בו הם חישוב פעולות הכפל והחילוק בתחום מספרים לא-מוגבל, תחביר של פעולות חשבון רב-שלביות (סדר פעולות החשבון), המושגים כופל ומחלק, מספרים ראשוניים ותפקידם כאבני הבניין של כלל המספרים הטבעיים, פעולות חילוק עם שארית, סימני התחלקות וסדרות של מספרים.

החלק השני, הכולל את הפרקים 28-33, עוסק בשברים, נושא הלימוד הקשה ביותר בעבור מרבית התלמידים, כפי שמעידים מורים והורים רבים. בפרקים אלה נניח את היסודות שיסייעו לנו להבין מה הם שברים וכיצד הם מרחיבים את עולם המספרים שעד לאותו שלב היה מוגבל למספרים טבעיים בלבד. לאחר שנבין מה הם שברים וכיצד מייצגים אותם, נעסוק בהשוואה בין שברים ובארבע פעולות החשבון שבהן האופרנדים יכולים להיות מספרים שלמים או שברים. דגש מיוחד יינתן להבנת המשמעות של פעולות החשבון כשהאופרנדים הם שברים.

נושאים נוספים, כדוגמת מספרים עשרוניים, אחוזים, יחס ופרופורציה, ממוצע, מעגל ועיגול וגופים ונפחים ייכללו בחלק ג שיחתום את סדרת הספרים מתמטיקה של בית ספר יסודי.

בספר זה כבוקדמו הפרקים בנויים נדבך על גבי נדבך. לעתים משולכות בספר הצעות לנושאים הנלמדים בחטיבת הביניים, זאת מתוך אמונה שאחת המטרות של ההוראה בבית הספר היסודי היא זריעת יסודות לקראת לימוד של מתמטיקה מתקדמת.

חשוב לי להדגיש שמתמטיקה של בית הספר היסודי הוא ספר מתמטיקה ואינו ספר המלמד כיצד ללמד מתמטיקה. אין לראות בו "מדריך למורה", כדוגמת המדריכים הנלווים לספרי התלמיד. עם זאת, לעתים קרובות מצאתי שלא ניתן להפריד בין התוכן לבין אופן הוראתו, ולכן לעתים מופיעות בספר גם התייחסויות דידקטיות. בעניין זה חשוב לי להדגיש עוד שהתייחסתי לנושאים דידקטיים אך ורק כשהם היו קשורים ישירות לתכנים מתמטיים. כך למשל, לא תמצאו בספר המלצות לעבוד עם עזרי הוראה כאלה או אחרים, הטפות בעד או נגד חקר, או דעות בעד או נגד עבודה בקבוצות. לעומת זאת, תמצאו בו התייחסות לשאלות כמו סדר הצגת נושאים, מעבר ממוחשי למופשט, ומידת האיזון בין הקניית עקרונות לבין תרגול.

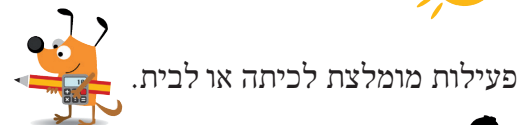
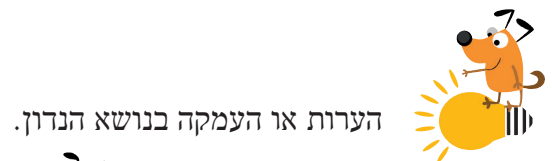
בסופם של מרבית הפרקים כללתי תרגילים. התרגילים אינם אחידים ברמתם. חלקם מיישמים בפשטות את התכנים שנדונו באותו הפרק, וחלקם מורכבים יותר ויכולים לשמש כתרגילי אתגר ורשות לתלמידים מתקדמים. באופן מודע לא צירפתי פתרונות. אני מאמין שחשיבות התרגילים היא במחשבה שהם מעוררים, ולכן פתרונות עלולים לפגוע בנכונות להשקיע את הזמן הנדרש להתמודד עם שאלה, ובזאת לפגוע בהזדמנות לרכוש תוכנות שלא יעלו בעת קריאת פתרון.

קהל יעד

הספר מיועד למורים ולהורים, וכן לכל מי שחפץ להתבונן במתמטיקה שלמד בצעירותו מנקודת מבט בוגרת יותר. אני מקווה שקריאתו תועיל לכל העוסקים בהוראת המתמטיקה – בכיתה או בבית – בכך שתבסס ותעמיק את הבקיאות במתמטיקה יסודית, ותחדד את המורכבות והיופי שלה ושל הוראתה. כמו כן, אני מאמין שמתמטיקה של בית ספר יסודי יאפשר לקוראיו להשתמש בצורה נכונה יותר בספרי התלמיד. אני ממליץ לקרוא ספר זה בשלמותו אבל בעת ובעונה אחד בחרתי לחלקו למספר רב של פרקים כדי לאפשר למורים ולהורים להשתמש בו גם באופן ממוקד לפני שהם מתחילים ללמד נושא חדש.

סימונים

לכל אורכו של הספר מופיעים הסימונים הבאים, המציינים את אופיים של הסעיף או הפסקה הנדונים:



פרק 20 - כפל:

חישוב בתחום מספרים לא־מוגבל

מה
בפרק?

- מספרים עגולים • כפל של מספרים עגולים • כפל באמצעות חוק הפילוג
- האלגוריתם השקוף • אלגוריתם הכפל התקני • עצמות נפייר
- האלגוריתם הבינרי • שיטת האיכרים

בפרק זה נרחיב באמצעים שונים את יכולתנו לחשב מכפלות לתחום מספרים לא־מוגבל, ובפרט באמצעות אלגוריתם הכפל האנכי. בתוך כך נראה שנחוצים לנו לצורך זה שליטה בלוח הכפל, הבנה מעמיקה של חוק הפילוג, ויכולת לכפול מספרים ב־10, ב־100, ב־1000 וכו' (מספרים שכינינו יחידות עשרוניות). בטרם נדון באלגוריתמים לחישוב מכפלות בתחום מספרים לא־מוגבל, נשים לב שאנחנו יכולים לחשב מכפלות בתחום מספרים לא־מוגבל באמצעות אלגוריתם החיבור. כך למשל, נוכל לחשב את המכפלה 12×536 באמצעות חיבור חוזר:

$$\begin{aligned}(2 \text{ פעמים } 536) \quad 536 + 536 &= 1072 \\(3 \text{ פעמים } 536) \quad 1072 + 536 &= 1608 \\&\vdots \\(12 \text{ פעמים } 536) \quad 5896 + 536 &= 6492\end{aligned}$$

החיסרון של אמצעי זה הוא חוסר יעילותו, שכן מידת הסיבוכיות (חלק א, פרק 10, עמ' 120) של דרך חישוב זו נמצאת ביחס ישר לגודלו של הכופל.

פעילות בנושא כפל בתחום החורג מלוח הכפל



לפני שמלמדים ילדים לפתור תרגילי כפל בתחום מספרים רחב יותר מזה שנלמד בכיתות א ו־ב, מומלץ לאתגר אותם בחישוב מכפלות, ובדרך זו לעודד אותם לפתח אסטרטגיות חישוב משלהם. למשל, נציג לפניהם את השאלה הבאה:

בחפיסת קלפים יש קלפים מ־4 סוגים: עלה, לב, תלתן ויהלום, ובסך הכול 13 קלפים מכל סוג (מספרים מ־1 עד 10, נסיך, מלך ומלכה). כמה קלפים מונה חפיסה אחת?

בשלב ראשון על הילדים לזהות שכדי שיוכלו לענות על השאלה עליהם לחשב את המכפלה 13×4 . בשלב הבא הם יכולים לפתח מגוון של דרכים לחישוב מכפלה זו, למשל:

1. דילוגים של 4 בלוח המאה
2. דילוגים של 13 בלוח המאה
3. שימוש בחוק הפילוג ועל פיו חיבור 10×4 ו- 3×4
4. שימוש בחוק הקיבוץ ועל פיו חישוב 4×13 כפעמיים 2×13

זהו רק קומץ ממגוון הדרכים שילדים יכולים לפתח. אם ילדים נענים לאתגר בחיוב, אפשר להעלות את רמת הקושי עד לכפל של מספרים דו-ספרתיים. העיסוק הלא-תבניתי בתרגילים מסוג זה מחזק בילדים את ההבנה, והוא הזדמנות מצוינת הן לאיתור מוקדם של תפיסות שגויות והן לטיפול בהן.

כפל של מספרים "עגולים"

נניח שאנחנו יודעים לחשב את המכפלה הבאה:

$$7 \times 8 = \boxed{56}$$

כיצד נוכל להיעזר בידע זה כדי לחשב גם את המכפלות הבאות?

$$70 \times 8 = \boxed{?}$$

$$7 \times 80 = \boxed{?}$$

$$70 \times 80 = \boxed{?}$$

$$700 \times 8 = \boxed{?}$$

$$7000 \times 80 = \boxed{?}$$

לפני שנענה על השאלה נברר מה מייחד מכפלות אלה, וכיצד הן קשורות למכפלה 7×8 שהנחנו שאנחנו יודעים לחשב.

בחמש המכפלות לעיל יש בכל אחד משני הגורמים רק ספרה אחת השונה מאפס. בכופל ספרה זו היא 7, ובנכפל ספרה זו היא 8. מספרים כמו 7, 70, 700 ו-7000 מייצגים כמות חד-ספרתית של יחידות עשרוניות - 7 אחדות, 7 עשרות, 7 מאות ו-7 אלפים. דרך אחרת לתאר מספרים אלה היא כמכפלה של מספר חד-ספרתי וחזקה של 10 (חזקה של 10 היא כפל חוזר של 10). כך למשל:

$$70 = 7 \times 10$$

$$700 = 7 \times 10 \times 10$$

$$7000 = 7 \times 10 \times 10 \times 10$$

בפרק זה נכנה בשם מספרים עגולים מספרים שיש בהם רק ספרה אחת השונה מאפס, כלומר את קבוצת המספרים

1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30 ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000, 2000, ...

מונח זה אמנם אינו תקני, אבל השימוש בו יחסוך מאיתנו חזרות רבות על צירוף המילים המסורבל מספר שהוא מכפלה של מספר חד-ספרתי וחזקה של 10.



נחזור לחמשת התרגילים שהוצגו לעיל: אם נחיל את חוק החילוף ואת חוק הקיבוץ (חלק א, פרק 7, עמ' 75 ו-77) על הגורמים לאחר שפירקנו אותם למכפלה של מספר חד-ספרתי וחזקה של 10, נוכל לבטא את הביטויים החשבוניים שעלינו לחשב באופנים הבאים:

$$70 \times 8 = (7 \times 10) \times 8 = (7 \times 8) \times 10$$

$$7 \times 80 = 7 \times (8 \times 10) = (7 \times 8) \times 10$$

$$70 \times 80 = (7 \times 10) \times (8 \times 10) = (7 \times 8) \times (10 \times 10)$$

$$700 \times 8 = (7 \times 10 \times 10) \times 8 = (7 \times 8) \times (10 \times 10)$$

$$7000 \times 80 = (7 \times 10 \times 10 \times 10) \times (8 \times 10) = (7 \times 8) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10)$$

עתה, אם נזכור שכפל ב-10 כרוך בהזזת כל ספרה עמודה אחת שמאלה והוספת הספרה 0 בעמודת האחדות (חלק א, פרק 7, עמ' 86), הרי ששילוב בין תכונה זו לבין הידיעה ש- $7 \times 8 = 56$ יאפשר לנו לפתור בקלות את חמשת התרגילים. כך:

$$70 \times 8 = 56 \times 10 = 560$$

$$7000 \times 80 = 56 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 560000$$

שימו לב:

$$70 \times 8 = 560$$

$$7 \times 80 = 560$$

$$70 \times 80 = 5600$$

$$700 \times 8 = 5600$$

$$7000 \times 80 = 560000$$

דוגמאות אלה מובילות לניסוח הכלל הבא: כשכופלים שני מספרים עגולים, אפשר לעשות זאת בשני שלבים:

א. להתעלם מהאפסים בעמודות הימניות של כל גורם (אם אמנם יש אפסים), ולכפול זו בזו את שתי הספרות שאינן 0.

ב. להוסיף לימין המכפלה שהתקבלה בסעיף א אפסים כמספר האפסים בשני הגורמים יחדיו.

פרק 22 - סדר פעולות החשבון

- פענוח חד-משמעי של ביטויים חשבוניים
- רשתות חישוב
- שימוש בסוגריים
- חוקי קדימות של פעולות חשבון
- אות ועוד

מה
בפרק?

מה הבעיה?

ארבע פעולות החשבון פועלות על שני מספרים, המכונים אופרנדים, ומייצרות תוצאה בהתאם למספרים שעליהן הן פועלות. בחלק א (פרק 3) דימינו את כל אחת מפעולות החשבון למכונה שלה שתי "כניסות", אחת לכל אופרנד, ו"יציאה" אחת שבה מתקבלת תוצאת הפעולה.

כמו כן, כבר פגשנו ביטויים חשבוניים שיש בהם כמה פעולות חיבור עוקבות, או כמה פעולות כפל עוקבות, למשל:

$$12 + 6 + 7 = \boxed{?}$$

פעולת החיבור מקיימת את חוק הקיבוץ, שקובע שאין זה משנה אם תחילה נחבר את 12 ו-6 ואל הסכום המתקבל נחבר 7, או שנחבר תחילה את 6 ו-7 ואל הסכום המתקבל נחבר 12, כי בשני המקרים תתקבל אותה תוצאה סופית, כפי שמראים החישובים הבאים:



$$\begin{array}{r} 12 + 6 + 7 = 12 + 6 + 7 \\ \hline 18 \qquad \qquad 13 \\ \hline 25 \qquad \qquad 25 \end{array}$$

עתה נתבונן בתרגיל הבא:

$$5 + 7 \times 3 = \boxed{?}$$

לפנינו תרגיל שבו שתי פעולות חשבון – חיבור וכפל. אם נבצע תחילה את פעולת החיבור ואחריה את פעולת הכפל נקבל:

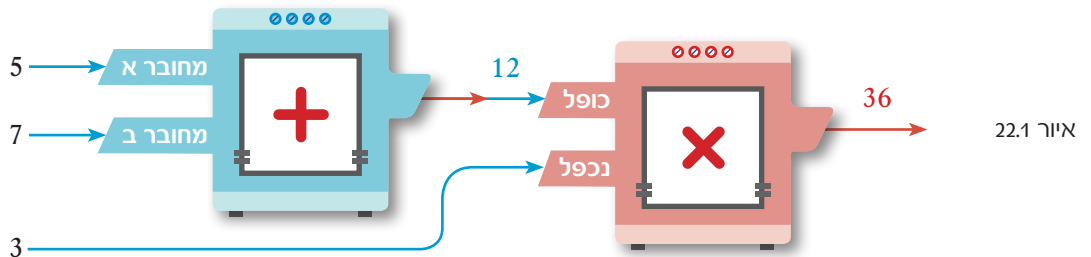
$$\begin{array}{r} 5 + 7 \times 3 \\ \hline 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

לעומת זאת, אם נבצע תחילה את פעולת הכפל ואחריה את פעולת החיבור נקבל:

$$\begin{array}{r} 5 + 7 \times 3 \\ \hline 21 \\ \hline 26 \end{array}$$

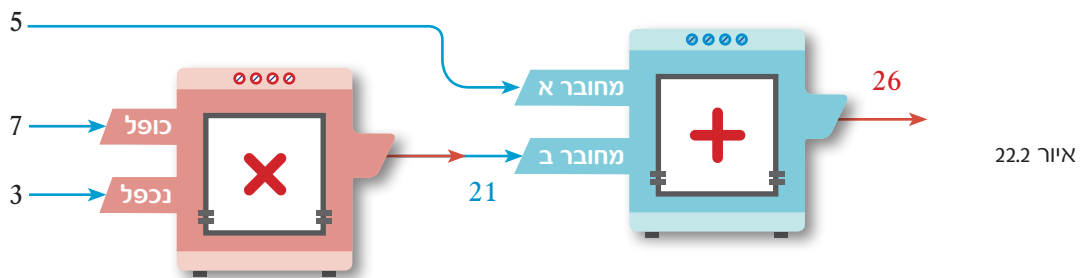
שרשרת פעולות חשבון המשלבת פעולות של חיבור וכפל אינה מקיימת חוק קיבוץ. במילים אחרות, שינוי סדר הפעולות משנה את התוצאה.

את שתי הדרכים שבהן אפשר לפרש את הביטוי החשבוני $5+7 \times 3$ אפשר להדגים באמצעות "מכונת חיבור" ו"מכונת כפל" (חלק א, פרק 4). ההמחשה המתאימה למקרה שבו מקדימים את פעולת החיבור לפעולת הכפל מוצגת באיור 22.1:



זו דוגמה לרשת חישוב (למושג "רשת" אותה משמעות כמו בצירופי המילים "רשת חשמלית" או "רשת כבישים"). בהמחשה זו, ובאלה שיוצגו להלן, המספרים הנתונים בתרגיל מסומנים בשחור, **תוצאת התרגיל** מסומנת באדום ו**תוצאות הביניים** בכחול.

רשת החישוב המתאימה למקרה שבו מתחילים בפעולת הכפל ולאחריה מבצעים את פעולת החיבור מוצגת באיור 22.2:



נתקלנו כבר ברצפים של פעולות שבהם חוק הקיבוץ אינו תקף, למשל במקרה שבו יש שתי פעולות חיסור עוקבות (חלק א, פרק 5, עמ' 54) או במקרה שבו יש שתי פעולות חילוק עוקבות (חלק א, פרק 8, עמ' 95). בשני מקרים אלה המוסכמה שנקבעה היא שיש לבצע את הפעולות לפי סדר הופעתן, משמאל לימין. נשאלת השאלה: האם כלל זה, שלפיו פעולות החשבון מבוצעות לפי סדר כתיבתן, תקף תמיד? או במקרה שלנו: מהו ערכו של הביטוי החשבוני $7+5 \times 3$? 36 או 26?

הערות

1. המוסכמות הקובעות את סדר פעולות החשבון התפתחו בהדרגה במהלך המאה ה-17, במקביל לפיתוחה של האלגברה.
2. קביעת סדר הפעולות אינה סוגיה מתמטית במהותה אלא סוגיה דקדוקית הנובעת מהצורך למנוע ריבוי משמעויות. חשוב שנכיר את המוסכמה ושנדע לחשב את ערכם המספרי של ביטויים חשבוניים בהתאם, אבל עם זאת כדאי גם שנזכור שזו מוסכמה שרירותית, כלומר שבאותה מידה היה אפשר להחליט גם על סדר פעולות אחר.

פרק 28 - שברים:

הרחבת עולם המספרים

שברים - חלק משלם • שברי יחידה • שברים שאינם שברי יחידה • דרך הסימון של שברים • מונה ומכנה • מספרים רציונליים • אינספור שברים • שברים - חלק מכמות

מה
בפרק?

היכרות עם שברים וכיצוע פעולות חשבון בשברים תופסים את חלק הארי של לימודי המתמטיקה בכיתות ד-ו. הדעה הרווחת היא ששבר הוא המושג המרכזי הראשון הגורם לילדים רבים קשיים מהותיים בהבנה, ויוצר אותה "חרדת מתמטיקה" ידועה לשמצה. ואמנם, בעוד שמרבית בוגרי מערכת החינוך שולטים שליטה לפחות בסיסית בארבע פעולות החשבון במספרים שלמים, אין זה המצב באשר לפעולות חשבון בשברים. מבוגרים רבים מעידים שגם בבגרותם "אינם מבינים שברים".

כמו בכל נושא לימוד אחר, המפתח להבנה הוא הקניית יסודות נכונים. ללא בסיס מוצק שבמרכזו הבנת מהות השבר והבנת המשמעות של פעולות חשבון בשברים, סופו של כל לימוד להצטמצם ללימוד פרוצדורלי שבו הילד לומד "מה לעשות" אבל לא "מה המשמעות של מה שאני עושה".

מטרתו של פרק זה, שהוא פרק המבוא בנושא שברים, היא להבהיר מה הם שברים. מצד אחד נבחן בפרק דוגמאות מחיי היומיום שבהן מופיעים שברים, ומהצד האחר נלמד כיצד שברים משתלבים בעולם המספרים הטבעיים שאותו מכירים ילדים מראשית לימודיהם.

מה הם שברים

כפי שאנחנו כבר יודעים, את המספרים הטבעיים המציא האדם כדי לתאר כמויות ולהשוות ביניהן (חלק א, פרק 1). בראשית ההתפתחות האנושית המספרים הטבעיים היו תמיד צמודים לשמות עצם, ושימשו כעין "מכונה משכפלת" (חמישה עצים היתה דרך מקוצרת לתאר עץ, עץ, עץ ועץ). האנושות היתה צריכה לעבור כברת דרך ארוכה עד שהחלה להתייחס למספר כאל ישות עצמאית המנותקת מהעצמים שאת הכמות שלהם היא מתארת. בסופו של תהליך ההפשטה היה אפשר לעסוק בפעולות בין מספרים כמודל מופשט לפעולות מוחשיות בין קבוצות של עצמים (למשל, חיבור הוא מודל מופשט לצירוף של קבוצות). התפתחות דומה עוברת גם ילדים, ואצל רובם השלב הראשוני בהתפתחות מושג המספר מתרחש עוד לפני שהם מגיעים לבית הספר.

נדרש לאדם זמן רב עוד יותר עד שהחל לתאר כמויות שהן חלק ממכלול גדול יותר. אף על פי שתיאור כזה מתעורר במגוון הקשרים, הוא מורכב ומופשט יותר מאשר תיאור כמותי המבוסס על מנייה. בסופו של דבר, גיבשה האנושות מושג של מספר המתאר חלק משלם. למושג זה אנחנו קוראים שבר. השברים, שבראשית דרכם היו צמודים תמיד לשמות עצם שאת חלקם הם תיארו, הפכו ברבות הזמן, כמו המספרים הטבעיים, לישויות עצמאיות שאפשר לעסוק בהן במנותק מהעצמים שאותם או את חלקם הן מתארות.

התפתחות זו של מושג השבר אמורה להתרחש גם בקרב ילדים לאורך שנות בית הספר היסודי (ואולי גם מאוחר יותר). בסופו של התהליך עליהם לראות כשברים מספרים מופשטים כמו המספרים הטבעיים, לדעת לבצע בהם פעולות חשבון, ובעיקר לדעת לתאר באמצעותם מצבים מוחשיים. וכמו במקרים אחרים בחיים, מתברר שאין דרכי קיצור, ושימוש מורכב כשבר מופנם בילד רק לאחר תהליך לימוד ממושך ומדורג.

מספרים טבעיים כמוודדים כמות

תפיסתי היא שעיקרון מנחה בלימוד שברים צריך להיות הקבלה מרבית לאופן שבו נלמדים המספרים הטבעיים, ולכן, בטרם נלמד מה הם שברים, ניזכר במשמעותם של מספרים טבעיים כמוודדים גודל של קבוצה.

מספרים טבעיים משמשים אותנו למענה על השאלה "כמה?", וליתר דיוק, למדידת מופעים של עצם שאנחנו קוראים לו "שלם" ומייחסים לו את הערך הכמותי "אחד". במילים אחרות, מספרים נותנים בידינו כלי לתאר כמה פעמים "אחד" מופיע בקבוצה של עצמים.

כדי להיזכר טוב יותר במשמעות המספר הטבעי נקרא דו-שיח בין שתי דמויות, חנה ותמי, שילוו אותנו לאורך פרק זה:

חנה: תמי, כמה תפוחים יש באיור 28.1?



איור 28.1

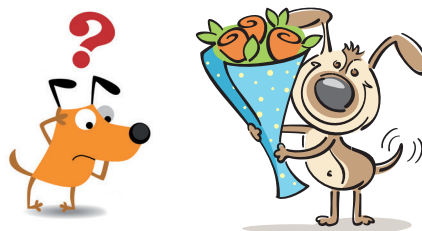
תמי: אני רואה תפוח, תפוח, תפוח ותפוח.

חנה: אם כן, כמה תפוחים יש?

תמי: אחד, אחד, אחד ואחד, ואני אפילו יודעת להציג את תשובתי בסימון מתמטי:

$$1 + 1 + 1 + 1$$

חנה: תשובתך נכונה אבל מסורבלת, והיא היתה נעשית עוד יותר מסורבלת אילו היו יותר תפוחים.



ואכן, בדיוק כדי למנוע סרבול זה הומצא המספר "ארבע". "ארבע" היא מילה נרדפת לצירוף המילים "אחד, אחד, אחד ואחד". מספרים נותנים בידינו כלי שבאמצעותם נוכל לענות על השאלה "כמה?" במילה אחת (או בצירוף של מילים ספורות).

פרק 33 - חילוק של שברים

משמעויות פעולת החילוק • משמעויות של חילוק שברים • דרכי חישוב של חילוק שברים • האם חילוק תמיד מקטין?

מה
בפרק?

חילוק נחשב לפעולת החשבון הקשה מבין כל פעולות החשבון, וחילוק של שברים על אחת כמה וכמה, שכן על הקשיים שבפעולת החילוק נוספים הקשיים הכרוכים בהבנת מהות השבר. עיקר הקושי בעבור ילדים אינו דווקא בחישוב פעולת החילוק, אלא בזיהוי המצבים שבהם פעולת החילוק נדרשת. בעבור ילדים רבים לתרגיל כדוגמת

$$1 \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \boxed{?}$$

איך כל משמעות מוחשית, ולכן הידע היחיד שבו הם מתרכזים הוא דרך חישוב המנה. כך למשל, בארצות הברית מכיר כל ילד את הסיסמה:



Ours is not to reason why
Just invert and multiply

ובתרגום חופשי לעברית:

למה לנו בכלל לשאול?
נהפוך ואז נכפול.

סיסמה זו ממליצה לילדים שלא לנסות להבין מהי המשמעות של חילוק שברים, ורק לזכור כיצד לחשב את המנה: לכפול את המחולק במספר ההופכי של המחלק.

מי שקרא ספר זה עד לנקודה זו ודאי מנחש מהי דעתי בסוגיה: הבנה של משמעות הפעולה קודמת בחשיבותה לשליטה בדרך החישוב, ולכן, יותר משחשוב לזכור כיצד לחשב, חשוב להבין מדוע זו הדרך לחשב. חשבו לרגע: האם חילוק של שברים חייב להיות נושא קשה ומאיים? כמו בכל נושא אחר, יצירת בסיס מוצק ושימת דגש על משמעות יכולות לרכך את הקושי, ובעיקר להעניק לילדים הבנה שבלעדיה אין ערך ללימוד.

פעולת החילוק

כשלמדנו על פעולת החילוק (חלק א, פרק 8) הדגשנו שתי משמעויות של הפעולה: חילוק לחלקים וחילוק להכלה.

$$12 : 3 = \boxed{?}$$

מייצג שני סוגים של שאלות מילוליות:

1. חילוק לחלקים: למשל, חילקנו 12 תפוחים שווה בשווה ל-3 ילדים. כמה תפוחים קיבל כל ילד?
2. חילוק להכלה: למשל, חילקנו 12 תפוחים לשקיות שבכל אחת 3 תפוחים. כמה שקיות נדרשו לנו? בחילוק לחלקים ידועה הכמות הכוללת, ידוע לכמה קבוצות שוות-גודל הכמות הכוללת מחולקת, וצריך למצוא כמה עצמים יש בכל קבוצה. למעשה, לפנינו תרגיל כפל שבו הנכפל אינו ידוע:

$$3 \times \boxed{?} = 12$$

בחילוק להכלה ידועה הכמות הכוללת, ידוע כמה עצמים יש בכל קבוצה, וצריך למצוא כמה קבוצות יש. למעשה, לפנינו תרגיל כפל שבו הכופל אינו ידוע:

$$\boxed{?} \times 3 = 12$$

נתבונן שנית בתרגיל החילוק שבו פתחנו את הפרק:



$$1\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \boxed{?}$$

הנטייה (החיובית כשלעצמה) של רבים היא להציב את שני האופרנדים, $1\frac{1}{2}$ ו- $\frac{2}{3}$, באותן שתי תבניות של שאלות מילוליות שבהן הצבנו בדוגמה הקודמת את האופרנדים 12 ו-3:

1. חילוק לחלקים: חילקנו $1\frac{1}{2}$ תפוחים שווה בשווה ל- $\frac{2}{3}$ ילדים. כמה תפוחים קיבל כל ילד?
 2. חילוק להכלה: חילקנו $1\frac{1}{2}$ תפוחים לשקיות שבכל אחת $\frac{2}{3}$ תפוחים. כמה שקיות נדרשו לנו?
- התבוננו בשאלה הראשונה. מבחינה מילולית היא בעייתית: כיצד אפשר לחלק עצם שווה בשווה ל- $\frac{2}{3}$ של ילד? מהי המשמעות של "כל ילד" בהקשר זה?
- התבוננו בשאלה השנייה: לחלוקה של $\frac{4}{3}$ של תפוח נדרשות 2 שקיות. השארית היא $\frac{1}{6}$ של תפוח. האם תיידרש לה שקית שלמה? יש כלל משמעות לחלק משקית?
- שאלות אלה יוצרות בילדים בלבול, ואם הם אינם מקבלים מענה לבלבול זה הם נרתעים מפתרון שאלות מילוליות, ומשם קצרה הדרך לאימוץ הסיסמה: "למה לנו בכלל לשאול? נהפוך ואז נכפול".
- אחת הסיבות העיקריות לקושי שילדים חווים בהבנת חילוק של שברים היא מגוון דל מדי של שאלות מילוליות שאליהן נחשפו כשעסקו בחילוק של מספרים שלמים. בסעיף הבא נבחן אוסף של שאלות מילוליות שכולן מתאימות לאותו תרגיל חילוק מופשט.