תוכן עניינים

הקדמה **vii**

1 מבוא **1**

2 יסודות **3**

2.1 סמנטיקה ותחביר 3

2.2 הוכחות 9

2.3 תורת הקבוצות 14

3 המספרים הממשיים **21**

3.1 ההצגה האקסיומטית של המספרים הממשיים 21

3.2 הפעולות החשבוניות 24

3.3 תכונות הסדר 29

3.4 המספרים הטבעיים, השלמים והרציונליים 37

3.5 עקרון האינדוקציה ושימושיו 42

3.6 חזקות, סכומים ומכפלות 49

3.7 ההצגה העשרונית של המספרים השלמים 57

4 תכונת השלמות של המספרים הממשיים **61**

4.1 הפרדוקס של פיתגורס 61

4.2 אקסיומת החסם העליון 63

4.3 תכונת הארכימדיות וצפיפות המספרים רציונליים 68

4.4 חישוב של חסמים עליונים ותחתונים 71

4.5 המספר הממשי $\sqrt{2}$ והמספרים האי־רציונליים 76
4.6 פעולת החזקה 78

5 סדרות וגבולות 87
5.1 מושג הסדרה 87
5.2 גבולות 90
5.3 חסימות, תכונות סדר ומשפט הסנדוויץ' 98
5.4 אריתמטיקה של סדרות וגבולות 105
5.5 גבולות במובן הרחב 117
5.6 סדרות מונוטוניות והלמה של קנטור 122
5.7 תת־סדרות וגבולות חלקיים 129
5.8 גבולות עליונים וגבולות תחתונים 137
5.9 תנאי קושי 145
5.10 חזקות עם מעריך ממשי 148
5.11 המספר e והחזקות e^x 152
5.12 קבוצות בנות מניה ועוצמת הממשיים 157

6 טורים 163
6.1 טורים 163
6.2 תנאי קושי ותכונות בסיסיות 168
6.3 טורים חיוביים 172
6.4 טורים עם סימנים משתנים 180
6.5 הכנסת סוגריים ושינוי סדר איברים 188
6.6 מכפלת טורים 199
6.7 הצגת המספרים כשברים עשרוניים אינסופיים 206
6.8 מכפלות אינסופיות 213

7 פונקציות, גבולות ורציפות 217
7.1 מושג הפונקציה 217
7.2 פונקציות ממשיות 219

7.3 הפונקציות האלמנטריות, חלק א' 224
7.4 הגבול של פונקציה בנקודה 231
7.5 רציפות בנקודה 242
7.6 אפיון היינה ותנאי קושי 248
7.7 אי־שוויונות ואריתמטיקה של גבולות 252
7.8 פעולת ההרכבה 259
7.9 פונקציות רציפות בקטע סגור 266
7.10 פונקציות מונוטוניות 276
7.11 פונקציות הפוכות 281
7.12 הפונקציות האלמנטריות, חלק ב' 286
7.13 גבולות במובן הרחב וגבולות באינסוף 290
7.14 רציפות במידה שווה 296

8 הנגזרת 301

8.1 הנגזרת בנקודה 301
8.2 פונקציות אפסיות והנגזרת כקירוב לינארי 309
8.3 כללי תחשיב של נגזרות 314
8.4 נגזרות הפונקציות האלמנטריות 325
8.5 פונקציות גזירות בקטע 329
8.6 חקירת פונקציות 341
8.7 כלל לופיטל 348
8.8 פונקציות קמורות 355
8.9 שיטת ניוטון־רפסון למציאת שורשים של פונקציה 365
8.10 מספרים אלגבריים ומספרים טרנסצנדנטיים 370

9 האינטגרל 375

9.1 האינטגרל המסוים לפי דרבו 375
9.2 התנודה והפרמטר של חלוקה 386
9.3 משפחות של פונקציות אינטגרביליות 391
9.4 משפטי תחשיב 396

9.5 האינטגרל המסוים לפי רימן 404
9.6 המשפט היסודי 409
9.7 האינטגרל הלא מסוים 415
9.8 האינטגרל הלא אמתי 437
9.9 שימושים של האינטגרל 447
9.10 אינטגרציה נומרית 455
9.11 נוסחת סטירלינג 459

10 סדרות וטורי פונקציות 463

10.1 התכנסות נקודתית של סדרות פונקציות 463
10.2 התכנסות במידה שווה 469
10.3 גבולות במ"ש של פונקציות רציפות 477
10.4 אינטגרציה איבר־איבר 481
10.5 גזירה איבר־איבר 487
10.6 פונקציה רציפה שאינה גזירה באף נקודה 492

11 פולינומי טיילור־מקלורן וטורי חזקות 497

11.1 פולינומים 497
11.2 פולינומי טיילור־מקלורן 499
11.3 תכונות הקירוב של פולינום טיילור 503
11.4 הערכת השארית של פולינום טיילור בנקודה 510
11.5 טורי חזקות ונוסחת קושי־הדמר 515
11.6 רציפות, גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 521
11.7 טורי חזקות של הפונקציות האלמנטריות 527
11.8 משפט אבל ושימושיו 534
11.9 פונקציות יוצרות וסדרות רקורסיה 537

ביבליוגרפיה 541

האלף־בית היווני 543

רשימת סמלים 545

מפתח 547

הקדמה

ספר זה נועד ללוות קורס אוניברסיטאי ראשון בחשבון אינפיניטסימלי, ומבוסס על תכנית הלימודים של הקורס כפי שהוא נלמד באוניברסיטה העברית. קיימים בשפה העברית מספר ספרים בחשבון אינפיניטסימלי, אך לדעתנו אין לאף אחד מהם את מכלול התכונות הדרושות מספר כזה כיום. נזכיר במיוחד את הספר "חשבון אינפיניטסימלי" של דוד מיזלר [1], שמלווה באופן מסורתי את הקורס באוניברסיטה העברית. זהו ספר מדויק ומקיף, אך הוא מכוון לקהל יעד השונה במידה ניכרת מקהל הסטודנטים הלומדים כיום את הקורס. הצגת החומר בו מהירה מאד ותמציתית, והוא אינו מרבה בהסברים ובדוגמאות.

הספר שלנו נועד למלא חלל זה. מטרתו היא לא רק לסכם את החומר אלא גם להסביר אותו בצורה הברורה והאינטואיטיבית ביותר האפשרית. הוא נפתח במבוא בנושאים מתמטיים כלליים, ומשם עובר להצגה מלאה אך נינוחה של חומר הקורס: הגדרת המספרים, סדרות וטורי מספרים, רציפות, גזירה ואינטגרציה של פונקציות במשתנה אחד, סדרות וטורי פונקציות, פולינומי טיילור וטורי חזקות. הטקסט כולל דוגמאות ותרגילים רבים בכל הרמות.

כללנו בספר כמה נושאים שאינם שייכים לליבת הקורס, כמו עוצמת המספרים הממשיים, מספרים טרנסצנדנטיים, שיטות נומריות, פונקציית ויירשטראס, נוסחת סטירלינג ועוד. לדעתנו הרחבות אלה חשובות לא רק לתלמידים שימשיכו ללמוד מתמטיקה, שממילא יתקלו בהן בהמשך לימודיהם, אלא במיוחד לתלמידים שעבורם הקורס בחשבון אינפיניטסימלי הוא ההזדמנות האחרונה להכיר את המתמטיקה המודרנית.

נושא אחד שלא כלול בספר הוא החשבון האינפיניטסימלי של פונקציות רבות משתנים. בקורס באוניברסיטה העברית נוגעים בנושא זה לקראת סוף הקורס, ובמקור התכוונו לכלול אותו בספר. החלטנו בסופו של דבר שלא לכלול אותו כיוון שלא נוכל לדון בו בהיקף הראוי. מצד שני, ישנם בשפה העברית ספרים טובים בנושא, כמו הספר של מיזלר [1] או הספר של לינדנשטראוס בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם [9].

ארגון הספר

מושגים חדשים מופיעים **בהדגשה** במקום הופעתם הראשון. בסוף כל הוכחה מופיע הסימן ■. הסימן [1] מציין הפניה ביבליוגרפית, ומפנה לרשומה המתאימה ברשימת הספרים שבסוף הספר. הגדרות, סימונים, למות,[1] טענות, משפטים ומסקנות ממוספרים ברצף בכל סעיף. למשל, משפט שמספרו 1.2.3 נמצא בסעיף 1.2, כלומר בסעיף השני של הפרק הראשון, והוא המשפט השלישי באותו סעיף. האיורים, התרגילים והדוגמאות ממוספרים בנפרד. תרגילים קשים מסומנים ב־(*).

כדי להתמצא בספר ניתן להיעזר בתוכן העניינים ובשני המפתחות שבסוף הספר: מפתח סימנים, המסודר לפי סדר הופעת הסימנים ומפנה להופעתם הראשונה, ומפתח נושאים, המסודר לפי סדר א"ב. בסוף הספר תמצאו גם רשימה של הא"ב היווני.

דרישות קדם

כדי לקרוא את הספר אין צורך, עקרונית, בידיעות קודמות במתמטיקה. אנו נפתח כאן מבראשית את כל הנושאים שנעסוק בהם.

אולם בפועל, מומלץ להיות בקיאים במיומנויות חשבון בסיסיות הנלמדות בבית הספר, כגון פתרון של משוואות פשוטות וטיפול באי־שוויונות. במהלך הספר נזכיר גם מושגים מתורת הגאומטריה ומטריגונומטריה, את שיטת ההוכחה באינדוקציה, את מושג הפונקציה ומושגים הקשורים לו. היכרות עם נושאים אלה בוודאי לא תזיק. כדי להשלים את ידיעותיכם בנושאים אלה אפשר להיעזר בספרי הלימוד התיכוניים השונים.

כמה הצעות ללמידה נכונה

החומר שמובא כאן הוא בעל אופי שונה מאד מזה של המתמטיקה התיכונית. כדי להתמודד אתו יידרש מכם שינוי מחשבתי משמעותי. חוויית הלימוד היא כמובן עניין אישי, אך העצות הבאות עשויות לתרום ללימוד יעיל ומהנה יותר.

השתתפו באופן פעיל בלימוד. בזמן הקריאה חפשו דוגמאות למה שמתואר בטקסט, ציירו ציורים, העלו תהיות וענו עליהן. אם במשפט מסוים מופיעה הנחה, בדקו היכן משתמשים בה בהוכחה. שאלו את עצמכם מה קורה אם משנים את הניסוח של משפט מסוים באופן כזה או אחר, למשל על ידי השמטה או שינוי של אחת ההנחות, ונסו להוכיח או להפריך את הטענה החדשה.

פתרו תרגילים, ואחר־כך פתרו עוד תרגילים. אל תתעצלו ואל תוותרו לעצמכם. אי אפשר ללמוד מתמטיקה מבלי לעשות מתמטיקה, כפי שאי אפשר ללמוד לרקוד בלי

[1] למה (lemma) היא טענת עזר, כלומר טענה שמטרתה לסייע בהוכחת טענה חשובה יותר. מקור המילה הוא השפה היוונית.

לקום על הרגליים ולהתאמן. בסוף כל סעיף יש רשימה של תרגילים ברמות שונות. הם שם כדי שתפתרו אותם. אין צורך לפתור את כולם אבל כדאי לעבור על כולם, ולפתור מדגם מייצג שלהם. אפשר למצוא שאלות גם בספרים אחרים.

אל תנסו ללמוד את הספר בעל פה. הלימוד של ספר זה בעל פה הוא משימה בלתי אפשרית, וממילא לא תלמדו כך מתמטיקה. במקום לשנן אינספור פרטים קטנים נסו להבין את המוטיבציה מאחורי הדברים, את מבנה־העל של ההגדרות וההוכחות, וכיצד הן משתלבות זו בזו. הבנת התמונה הגדולה תאפשר לכם להשלים לבד את הפרטים הקטנים.

השתדלו להסתמך על משפטים קודמים במקום להוכיח אותם מחדש. התוצאות שמובאות בטקסט נועדו לשימוש בפתרון בעיות. כשאתם ניגשים להוכיח טענה או לפתור תרגיל חפשו טענות ומשפטים מהטקסט שעשויים להיות רלוונטיים לבעיה שלפניכם.

היעזרו בחברים ובמורים וקיימו דיון בנושאים הנלמדים. תוכלו ללמוד הרבה על ידי הצצה לדרך החשיבה של אחרים. בנוסף לעבודה האינדיבידואלית כדאי לדון עם חברים בחומר ובתרגילים, לשתף זה את זה בפתרונות שמצאתם, וגם לפתור יחד בעיות.

הקפידו על סדר הקריאה ואל תיצרו פערים. סדר הנושאים אינו שרירותי, וכל נושא מבוסס במידה רבה מאד על נושאים שקודמים לו. אם תדלגו על סעיפים חשובים ותרוצו קדימה, מהר מאד תלכו לאיבוד. אם במהלך הקריאה אתם נתקלים בנושא שאינו מוכר לכם, חיזרו אחורה ולמדו אותו, ורק אז המשיכו לנושא החדש.

אל תצפו שההבנה תבוא בן־לילה. תנו לעצמכם זמן לעכל את החומר ואל תצפו לבלוע פרק שלם ברגע. אם אתם "נתקעים" עשו הפסקה, התייעצו, וחזרו לבעיה מאוחר יותר.

יצירת קשר

על אף מאמצים רבים שעשינו לאתר שגיאות בטקסט לפני ההבאה לדפוס, אין ספק שנותרו טעויות שחמקו מעינינו. אם אתם חושבים שנתקלתם בטעות, אנא ספרו לנו עליה בדואל

infibook@math.huji.ac.il

רשימת תיקונים ניתן למצוא באתר האינטרנט

www.math.huji.ac.il/~infibook

פרק 1

מבוא

החשבון האינפיניטסימלי (באנגלית: infinitesimal calculus) הומצא בסוף המאה ה־17. הוא פותח במקביל ובאופן בלתי תלוי על ידי אייזק ניוטון (Isaac Newton, 1643־1727) וגוטפריד לייבניץ (Gottfried Leibnitz, 1647־1716). אמנם העיסוק במתמטיקה התחיל כבר בעת העתיקה,[1] אך המצאת החשבון האינפיניטסימלי היא ללא ספק אחת מפריצות הדרך המשמעותיות ביותר בהיסטוריה שלה. יחד עם תורת הפיזיקה של ניוטון, שפותחה באותן שנים, היא מהווה את קו פרשת המים בין העידן העתיק לעידן המודרני של המדע. גם היום החשבון האינפיניטסימלי משחק תפקיד חשוב במדעים כמו פיזיקה, הנדסה, כלכלה ועוד.

התורה של ניוטון ולייבניץ אפשרה לראשונה לענות על שאלות שונות במתמטיקה ובפיזיקה, שחלקן עמדו זמן רב ללא פתרון, וחלקן אפילו לא נשאלו. למשל,

- איך מחשבים שיפוע של עקומה במישור?
- או מחשבים שטחים ונפחים של גופים במישור ובמרחב?
- האם אפשר לרשום את המספר $\sqrt{2}$ בעזרת "נוסחה"?
- איך מוצאים ביעילות פתרון מקורב למשוואה $x^7 + x^4 + 2x^2 + x + 1 = 0$?
- מדוע כוח הכבידה גורם לכוכבי הלכת לנוע סביב השמש במסלולים שצורתם אליפסה?

על אף הצלחתה הרבה, התורה של ניוטון ולייבניץ נשענה על רעיונות מעורפלים למדי. ליקויים אלה הטרידו רק מעטים במאות הראשונות לקיום התורה כיוון שעל אף אי־הבהירות התאורטית, מבחינה מעשית התורה של ניוטון ולייבניץ היא תורה מוצלחת מאד. אולם החל מאמצע המאה ה־18 ובמהלך המאה ה־19, אי־הבהירות הפכה למכשול של ממש להמשך המחקר, והמתמטיקאים הפנו את תשומת לבם למציאת ביסוס תיאורטי מוצק יותר לתורה. הם נדרשו לענות על שאלות כמו:

[1] קיימים עדויות על ניצנים של פעילות מתמטית כבר בממלכה המצרית והבבלית באלף השלישי לפנה"ס.

- כיצד יש לפרש ביטוי מהסוג

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$$

האם הוא מייצג מספר ולמה הוא שווה?

- מדוע הנוסחה

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

נכונה כאשר מציבים $x=\frac{1}{2}$, אבל כאשר מציבים $x=2$ מקבלים את השוויון המוזר $-1=1+2+4+8+\dots$, שבצד אחד שלו מספר שלילי ובשני סכום של מספרים חיוביים?

- מהו בעצם סכום של אינסוף מספרים?
- מה זה בכלל מספר?

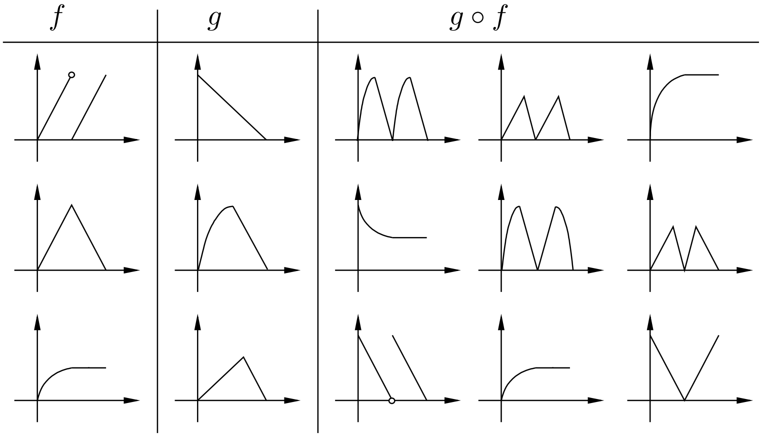
פתרון לשאלות אלה ניתן במהלך המאה ה־19. מרכזיים בפתרונן היו מושגי הגבול והרציפות, שנעסוק בהם רבות במהלך הספר.

במאה ה־19 חלו גם כמה תמורות במסגרת שבה מתבצע המחקר המתמטי. השינוי בא בעקבות גילוים של מספר פרדוקסים[2] ביסודות המתמטיקה, והחשש שללא אמצעי זהירות חמורים אי אפשר יהיה למנוע חדירה של שגיאות למתמטיקה. בניסיון להציב את המתמטיקה על קרקע מוצקה יותר עסקו רבים בחקר הלוגיקה ובנושאים יסודיים אחרים, מחקר שהגיע לשיאו בסוף המאה ה־19 ובתחילת המאה ה־20. כתוצאה ממאמצים אלו יש לנו כיום הבנה תאורטית טובה של יסודות המתמטיקה, ולצדה מסגרת מוסכמת של כללים שלפיה מתנהל המחקר. מטבע הדברים גם החשבון האינפיניטסימלי מתקיים כיום באותה מסגרת.

בספר זה נכיר את החשבון האינפיניטסימלי בגרסה המודרנית שלו, אך נפתח אותו בסדר ההפוך מהסדר ההיסטורי אותה תיארנו לעיל. אמנם המטרה המרכזית היא ללמוד את התורה של ניוטון ובני זמנו (וגם כמה תוספות מאוחרות יותר), אך לפני שנוכל לדון בה נצטרך ללמוד את השפה של המתמטיקה המודרנית, להגדיר את המספרים, ללמוד את תורת הגבולות והרציפות, ורק אז נוכל להתחיל לטפל בתורה של ניוטון ולייבניץ. זו אמנם לא הדרך הקצרה ביותר אל המטרה, אך יש לצדה גם שכר, שכן התחנות השונות שנעבור בדרך חשובים ומעניינים בפני עצמם.

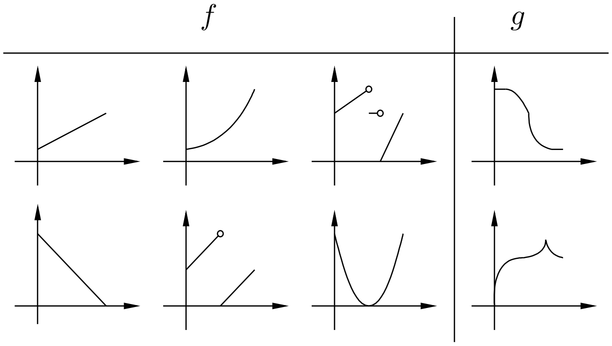
ההיסטוריה של החשבון האינפיניטסימלי, ושל המתמטיקה בכלל, היא נושא מרתק. מי שמעוניין יוכל לקרוא עליה בפירוט רב יותר בספר [18].

[2] במתמטיקה פרדוקס הוא תופעה המובילה למסקנה אשר סותרת את ההיגיון. איננו מאמינים שמצב כזה ייתכן, ואמנם, עד כה הפרדוקסים שהתגלו במתמטיקה הם פרדוקסים רק לכאורה, המעידים על כשל בניתוח או בפירוש של תופעה ולא על סתירה אמתית.



איור 7.8.5

7. לכל פונקציה f בעמודה הראשונה ולכל פונקציה g בעמודה השנייה, ציירו גרף מקורב של $g \circ f$.



איור 7.8.6

8. הוכיחו את מסקנה 7.8.3 ישירות מהגדרת הגבול.

9. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\sin(\sin(x))$.

(ב) $\lim_{x\to 0} e^{\sin x}$.

(ג) $\lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$.

(ד) $\lim_{x\to 2}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$.

(ה) $\lim_{x\to 3} x^{\frac{3}{2}}$.

(ו) $\lim_{x\to 1+} e^{\cos x}$.

(ז) $\lim_{x\to 0}\cos(x \cdot \sin \frac{1}{x})$.

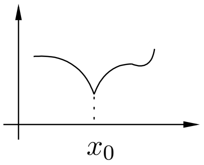
(ח) $\lim_{x\to 0+}\sqrt{\sin x}$.

(ט) $\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn}(e^x \cdot \sin x)$.

כנדרש. ■

בפרט, אם פונקציה אינה רציפה בנקודה אז היא אינה גזירה שם. כך אנו מקבלים שפע של דוגמאות לפונקציות שאינן גזירות בנקודה. למשל, הפונקציה sgn אינה רציפה ב־0 ולכן אינה גזירה שם, ופונקציית דירכלה (דוגמה (4) מעמוד 237) אינה רציפה באף נקודה ולכן אינה גזירה באף נקודה. מאידך, הדוגמאות הבאות מראות שרציפות אינה תנאי מספיק לגזירות.

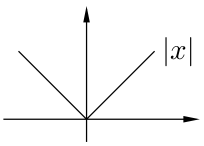
דוגמאות



איור 8.1.4 פונקציה שאינה גזירה ב־x_0

1. סיבה אחת לאי־גזירות יכולה להיות שב־x_0 יש "שפיץ" בגרף. במקרה זה ברור באופן אינטואיטיבי שלא תהיה נגזרת כי אין משיק לגרף בנקודה. דוגמה כזאת מופיעה באיור 8.1.4.

   דוגמה קונקרטית היא הפונקציה $f(x) = |x|$ המופיעה באיור 8.1.5. זו פונקציה רציפה ב־0 ויש לה שם "פינה". נראה שהיא אינה גזירה ב־0: לכל $h \neq 0$ מתקיים

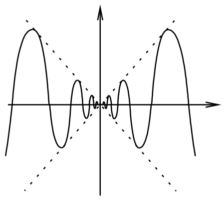


איור 8.1.5 הפונקציה $|x|$ אינה גזירה ב־0

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \mathrm{sgn}\, h$$

   ולכן למנה הזו אין גבול ב־0 והפונקציה $f(x) = |x|$ אינה גזירה ב־0.

2. סיבה נוספת לאי קיום הנגזרת בנקודה היא התנודדות חזקה של הפונקציה בקרבת הנקודה. תהי



איור 8.1.6 הפונקציה $x\sin(1/x)$

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   פונקציה זו רציפה באפס (למה?) אך אינה גזירה שם. אפשר להבחין באי־גזירות אם נדמיין מיתר שקצהו האחד בנקודה $(0,0)$ שעל הגרף, וקצהו השני בנקודה הנעה על הגרף וקואורדינטת x שלה מתקרבת לאפס. כפי שרואים באיור 8.1.6, המיתרים האלה מקבלים לסירוגין שיפוע ± 1 (וגם את כל שיפועי הביניים) ולכן השיפוע שלהם אינו מתכנס. באופן פורמלי יותר, לכל $h \neq 0$ מתקיים

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

   ולפונקציה זו אין גבול ב־0.

3. האי־גזירות בדוגמה הקודמת נבעה מכך שהפונקציה הכילה תנודות שגרמו למיתרים לקבל כל מיני שיפועים כאשר נקודת הקצה מתקרבת לאפס. אולם

האלף־בית היווני

A,α אלפא (alpha)
B,β בתא (beta)
Γ,γ גמא (gamma)
Δ,δ דלתא (delta)
E,ε אפסילון (epsilon)
Z,ζ זתא (zeta)
E,η אתא (eta)
Θ,θ ת'תא (theta)
I,ι איותא (iota)
K,κ כפה (kappa)
Λ,λ למדא (lambda)
M,μ מיו (mu)

N,ν נו (nu)
Ξ,ξ קסי (xi)
O,o אומיקרון (omicron)
Π,π פאי (pi)
R,ρ רו (rho)
Σ,σ סיגמא (sigma)
T,τ תאו (tau)
Υ,υ אופסילון (upsilon)
Φ,ϕ,φ פי (phi)
X,χ חי (chi)
Ψ,ψ פסי (psi)
Ω,ω אומגה (omega)

רשימת סמלים

$\neg P$, 4
$P \wedge Q$, 4
$P \vee Q$, 4
$P \Rightarrow Q$, 4
$P \iff Q$, 5
$\forall x \, P(x)$, 5
$\exists x \, P(x)$, 5
$x \in A$, 14
$\{a, b, c\}$, 15
$\{x \, : \, \ldots\}$, 15
$A \subseteq B$, 16
$\emptyset$, 16
$A \cup B$, 16
$A \cap B$, 16
$\cup_{i \in I} A_i$, 17
$\cap_{i \in I} A_i$, 17
$A \setminus B$, 17
(a, b) , 18
$A \times B$, 18
$\mathbb{R}$, 22
$x + y$, 24
$x \cdot y$, xy , 24
1 , 25
0 , 25
$-x$, 25
x^{-1} , $1/x$, 25
$x - y$, 25
$\mathbb{F}_2$, 27
$x < y$, 29
$x \leq y$, 29
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, 29
$|x|$, 32
$\max A$, $\min A$, 33
$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$, 33
$\pm\infty$, 34
$|I|$, 34
$\mathbb{N}$, 38
$\mathbb{Z}$, 39
$\mathbb{Q}$, 40
a^n , 49
$\sum_{i=k}^{n} a_i$, 50
$\sum_{i \in I} a_i$, 51
$\prod_{i=k}^{n} a_i$, 53
$n!$, 53
$\binom{n}{k}$, 53
$\sup A$, 63
$\inf A$, 65
$[x]$, 70
$\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$, 70
$-A, A + B, A \cdot B$, 72
$\sqrt{x}$, 77
$\sqrt[n]{x}$, 82
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, 87
$B_r(x)$, 90
$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$, $a_n \to a$, 92
$\not\to$, 95
$\lim_{n \to \infty} = \infty$, $a_n \to \infty$, 117
$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, 128
$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, 129
$\limsup_{n \to \infty} a_n$, $\liminf_{n \to \infty} a_n$, 138
e , 154
$\aleph_0$, 157
$\mathfrak{c}$, 158
$\aleph$, 158

164 , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
194 , a^+ , a^-
197 , $\sum_{i\in I} a_i$
213 , $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$
217 , $f(a)$
217 , $f : a \mapsto b$
217 , $f : A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$
219 , id_A
219 , $f|_D$
221 , $\mathbb{R}^2$
221 , $f \equiv c$
222 , sgn
225 , $\deg p$
226 , $\exp$, $\exp_a$
227 , π
227 , $\sin x$, $\cos x$
228 , $\tan x$, $\cot x$
229 , $p|q$
232 , $B_r^*(x)$
232 , $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$
232 , $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} L$
239 , $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+} f(x)$
241 , 1_A
259 , $g \circ f$
271 , $\sup f$, $\sup_{x\in D} f(x)$
272 , $\max f$, $\max_{x\in D} f(x)$
281 , $\omega_f(I)$
283 , f^-1
286 , $\log_a x$, $\ln x$
288 , $\arcsin x$, $\arccos x$
289 , $\arctan x$, $\mathrm{arccotan}\, x$
290 , $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
292 , $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$
302 , $f'(x)$
306 , $f'_-(x)$, $f'_+(x)$
307 , $f^{(k)}(x)$
307 , $\frac{d^k}{dx^k} f$
307 , $\frac{d}{dx} f$
310 , $o(x)$
377 , Δx_i
377 , m_i , $m_i(f,P)$, M_i , $M_i(f,P)$
378 , $\underline{s}(f,P)$, $\overline{s}(f,P)$
380 , $\underline{S}(f)$, $\overline{S}(f)$
380 , $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)dx$, $\int_{[a,b]} f$
386 , ω_i , $\omega_i(f,P)$
386 , ω , $\omega(f,P)$
387 , $\lambda(P)$
404 , $\sigma(f,P,\xi)$
413 , $f|_a^b$
415 , $\int f$, $\int f(x)dx$
433 , $\sinh x$, $coshx$
437 , $\int_{[a,\infty)} f$
438 , $\int_{[a,b)} f$
441 , $\int_{(a,b)} f$
442 , $\int_D f$
503 , $o(x^n)$
508 , $[p]_n$