תוכן העניינים

מבוא 1
פרק א': כלי עזר מתמטיים 1
אינדוקציה מלאה 1
איברים נוצרים באלגברה 3
הגדרה ברקורסיה 8

חלק א': תחשיב הפסוקים

פרק ב': תחביר 15
אלגברת היצירה של הביטויים 17
קטעים נוצרים בביטוי נוצר 26
יצירת הפסוקים ואופן כתיבתם 27
הצבה 29
פרק ג': הסמנטיקה של תחשיב הפסוקים 31
לוח האמת של פסוק 36
יחסים סמנטיים בין פסוקים 38
היחסים הסמנטיים ולוחות האמת 41
הסמנטיקה הבסיסית של קבוצות פסוקים 43
קשרים פסוקיים רב מקומיים 45
דואליות 48
הסמנטיקה של ההצבה 49
פרק ד': תורת הקשרים הפסוקיים 52
איפיון קבוצות מבנים ע"י פסוקים 62
פרק ה': עצים 64
פרק ו': עצי אמת ומשפט הקומפקטיות 72
משפט הקומפקטיות 78
תוצאות מתימטיות של משפט הקומפקטיות 84
פרק ז': תורת ההיסק 87

חלק ב': תחשיב היחסים 99

פרק ח': תחביר וסמנטיקה – הגדרות בסיסיות 100
פרק ט': היחסים הסמנטיים הבסיסיים 119
הצבה למשתנים אישיים חופשיים 125
החלפת משתנים מכומתים 130
פרק י': הסמנטיקה ואי-הכריעות של תחשיב היחסים המלא . . 133
פרק י"א: הסמנטיקה של התחשיב מסדר ראשון 146
חפיפה ושיוויון בתחשיב היחסים מסדר ראשון 156
תורת המספרים מסדר ראשון 162
פרק י"ב: תורת ההיסק בתחשיב מסדר ראשון 165
פרק י"ג: מושג ההגדרה 178

אינדקס 183
אינדקס הסימנים 188

מבוא

בלוגיקה המתימטית אנו חוקרים את השפה של המתימטיקה, ואת הקשר שלה עם העצמים המתימטיים. כשאנו מדברים בהקשר זה על השפה של המתימטיקה איננו מתכוונים לשפה בה אנו משתמשים כשאנו מדברים בינינו על מתימטיקה. השפה בה אנו מדברים בינינו על מתימטיקה היא בעיקרה עברית בתוספת מונחים מתימטיים, אותיות לטיניות ויווניות וסימנים מתימטיים. השפה הזאת גם אינה שפה ברורה לגמרי, כי אנו סומכים על השומע שיבין למה אנו מתכוונים. השפה המתימטית בה אנו נעסוק היא שפה מתימטית פורמלית המכילה אותיות לטיניות, סימני פיסוק וסימנים מתימטיים בלבד. שפה זאת היא, מצד אחד, שפה שסימניה מצומצמים במידה כזאת המאפשרת בנקל מתן פשר ברור לגמרי לכל הביטויים בה, ומצד שני, היא שפה עשירה למדי כך שאפשר להביע בה כל טענה מתימטית. שפה זאת נמצאת ברקע של השפה בה אנו מדברים למעשה על מתימטיקה, במובן שכל טענה מתימטית אותה אנו אומרים בעברית ניתן לראותה כתרגום לעברית של טענה בשפה המתימטית הפורמלית. אם אנו מביעים טענה מתימטית בעברית ואיננו מצליחים לתרגמה לשפה המתימטית הפורמלית פירושו של דבר הוא שפשוט לא ברור לנו מהי הכוונה המדוייקת של מה שאנו אומרים. למרות שאנו עוסקים רק בשפה המתימטית נביא לעתים גם דוגמאות מן השפה הרגילה בה אנו משתמשים בחיי יום יום. מקובל לכנות שפה כזאת בשם שפה טבעית (natural language). שפה טבעית יכולה להיות עברית או אנגלית או כל שפה מדוברת אחרת.

בחקר של שפה כלשהי אנו יכולים להבחין בשני חלקים. חלק אחד הוא התחביר (syntax) של השפה הכולל בתוכו את חלקו הגדול של הדקדוק של השפה. זהו החלק הקובע אילו הן המילים התקינות של השפה ומהם המשפטים המנוסחים נכונה של השפה. החלק השני, הנקרא סמנטיקה (semantics), עוסק בקשר שבין השפה לבין העולם שהשפה מדברת עליו. הנושא של אמת ושקר הוא נושא מובהק של הסמנטיקה כי הקביעה אם פסוק הוא אמיתי או שקרי נעשית על סמך מידע חיצוני. למשל, לא נוכל לדעת אם הפסוק "בשנת 1988 לא היו בירושלים בניינים בעלי יותר מ-20 קומות" הוא אמיתי או שקרי באמצעות ידיעת כללי הדקדוק של השפה העברית אלא אנו צריכים לדעת לשם כך מה היו מספרי הקומות של הבניינים השונים בירושלים בשנת 1988.

מטבעו של דבר קוי ההבחנה בין התחביר לסמנטיקה ברורים הרבה יותר בשפה מתימטית מאשר בשפה טבעית. עוד הבדל חשוב בין שפה מתימטית לשפה טבעית הוא עוד שבשפה טבעית ישנם משפטים רבים הבנויים היטב מבחינה דקדוקית אבל הם חסרי משמעות, כגון הפסוק "יוסף ישן מהר". אין הדבר כן בשפה המתימטית בה כל ביטוי בנוי היטב הוא בעל משמעות.

בדרך כלל, כאשר אנו רוצים לדעת אם טענה מתימטית היא אמיתית בעולם מתימטי אנו צריכים להתבונן לשם כך בעולם זה. אולם, ישנו חלק של הסמנאטיקה הנקרא תורת ההיסק (deductive theory) העוסק בקביעת כללים המאפשרים לנו לדעת שטענות מסויימות הן אמיתיות בעולם מתימטי מבלי להתבונן בעולם מתימטי זה אלא רק מתוך הידיעה שטענות אחרות מסויימות אמיתיות באותו עולם. למשל, כללים כאלו מאפשרים לנו לדעת שהפסוק $2 = 2$ אמיתי בעולם מתימטי בו יש ל-2 משמעות, וזאת מבלי להתבונן בעולם מתימטי זה. כמו כן מאפשרים כללים כאלו לדעת שאם אקסיומות הגיאומטריה המישורית אמיתיות במישור מסויים אז גם אמיתית באותו מישור הטענה שזויות הבסיס של משולש שווה שוקים הן שוות.

פרק א': כלי עזר מתימטיים

אינדוקציה מלאה

1.1 עקרון האינדוקציה (the induction principle). כשנדבר בקורס זה על מספרים טבעיים נתכוון תמיד למספרים הטבעיים כולל האפס. עקרון האינדוקציה הוא המשפט שאם המספר 0 הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ ואם לכל מספר n אם n הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ אז גם $n+1$ הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$. אנו נקרא לעקרון זה בשם עקרון האינדוקציה הרגילה כדי להבחין בינו לבין עקרון האינדוקציה המלאה שננסחו בהמשך. הטענה ש-0 הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ נקראת עוגן האינדוקציה. ההנחה ש-n הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ נקראת הנחת האינדוקציה (the induction hypothesis) והטענה שלכל n אם n הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ אז גם $n+1$ הוא בעל התכונה $\mathfrak{A}$ נקראת שלב האינדוקציה (the induction step).

ההנחה של שלב האינדוקציה (כלומר הטענה הבאה מיד אחרי המלה "אם" בשלב האינדוקציה) היא הנחת האינדוקציה, ומסקנת שלב האינדוקציה (כלומר הטענה הבאה מיד אחרי המלה "אז" בשלב האינדוקציה) היא הטענה ש- $n+1$ הוא בעל התכונה ת. עקרון האינדוקציה אומר שאם 0 הוא בעל התכונה ת ואם קיים שלב האינדוקציה אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה ת.

דוגמא. נתבונן בהוכחה באינדוקציה שלכל מספר טבעי n המספר n^3-n מתחלק ב-6. בהוכחה זאת הנחת האינדוקציה היא ש- n^3-n מתחלק ב-6, שלב האינדוקציה היא הטענה שלכל n אם n^3-n מתחלק ב-6 אז גם $(n+1)^3-(n+1)$ מתחלק ב-6, ומסקנת שלב האינדוקציה היא הטענה ש- $(n+1)^3-(n+1)$ מתחלק ב-6.

1.2 עקרון האינדוקציה המלאה. אם לכל מספר טבעי n קיים:

(0) אם לכל מספר טבעי הקטן מ-n ישנה התכונה ת אז גם ל-n ישנה התכונה ת

אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה ת.

ההנחה שלכל מספר טבעי הקטן מ-n ישנה התכונה ת נקראת הנחת האינדוקציה (של האינדוקציה המלאה). הטענה (0) שלכל מספר טבעי n אם קיימת הנחת האינדוקציה ל-n אז גם n עצמו הוא בעל התכונה ת נקראת שלב האינדוקציה. הנחת שלב האינדוקציה היא הנחת האינדוקציה. מסקנת שלב האינדוקציה היא הטענה ש-n הוא בעל התכונה ת. עקרון האינדוקציה המלאה אומר שאם לכל n קיים שלב האינדוקציה אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה ת. השם "אינדוקציה מלאה" לעקרון זה אינו מוצלח במיוחד, אולם אין לעקרון זה שם מקובל, אף לא באנגלית.

דוגמא. נתבונן בהוכחה באינדוקציה מלאה כי כל מספר טבעי n הגדול מ-1 הוא מכפלה של (אחת או יותר) חזקות של מספרים ראשוניים. בהוכחה זאת הנחת האינדוקציה היא ההנחה שכל מספר הקטן מ-n והגדול מ-1 הוא מכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים, שלב האינדוקציה הוא הטענה שאם כל מספר הקטן מ-n והגדול מ-1 הוא מכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים אז גם, אם $n>1$, n הוא מכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים, ומסקנת שלב האינדוקציה היא הטענה שאם $n>1$ אז n הוא מכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים.

1.2.1 האינדוקציה הרגילה והאינדוקציה המלאה. האינדוקציה הרגילה מתחילה מן המספר 0; היכן מתחילה האינדוקציה המלאה? נתבונן בשלב הראשון של האינדוקציה המלאה, כלומר בשלב האינדוקציה עבור $n=0$. הנחת האינדוקציה במקרה זה היא שכל מספר טבעי קטן מ-0 הוא בעל התכונה ת. הנחה זאת היא אמיתית תמיד כי היא נכונה באופן ריק (כי אי אפשר למצוא מספר טבעי הקטן מ-0 שאינו בעל התכונה ת כי אין מספרים טבעיים הקטנים מ-0). היות ועבור $n=0$ הנחת האינדוקציה נכונה תמיד לכן שלב האינדוקציה מבטיח לנו שמסקנת שלב האינדוקציה היא נכונה, כלומר של-0 ישנה התכונה ת. כך ראינו שהמקרה ההתחלתי של האינדוקציה הרגילה כלול בשלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה. (כמובן שעלינו להקפיד, כאשר אנו מוכיחים את שלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה, שהוכחה זאת תהיה תקפה גם למקרה $n=0$).

איך משתווה האינדוקציה המלאה לאינדוקציה הרגילה? נראה שהאינדוקציה המלאה חזקה מן האינדוקציה הרגילה. באינדוקציה הרגילה הנחת האינדוקציה היא שהמספר $n-1$ הוא בעל התכונה ת ושלב האינדוקציה הוא שאם קיימת הנחת האינדוקציה אז גם n הוא בעל התכונה ת. (אמנם ב-1.1 שלב האינדוקציה הוא שאם n הוא בעל התכונה ת אז גם $n+1$ הוא בעל התכונה ת, אבל הנוסח הנוכחי, בו החלפנו את n ב- $n-1$, מתאים יותר לצורך ההשוואה עם האינדוקציה המלאה). ברור שעבור $n>0$ הנחת האינדוקציה של האינדוקציה המלאה, שכל מספר הקטן מ-n, ולא רק $n-1$, הוא בעל התכונה ת היא הנחה חזקה מזאת של האינדוקציה הרגילה ולכן שלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה הוא יותר חלש מזה של האינדוקציה הרגילה (כי אם בשתי טענות מסוג אם ... אז ... מופיע אותו דבר אחרי ה"אז" ובטענה הראשונה מה שמופיע אחרי ה"אם" חזק יותר ממה שמופיע באותו מקום בטענה השניה אז הטענה הראשונה חלשה יותר). לכן, מכיוון שההנחה של עקרון האינדוקציה המלאה היא חלשה יותר העקרון עצמו הוא חזק יותר. עבור $n=0$ שלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה הוא, כפי שראינו לעיל, הטענה ש-0 הוא בעל התכונה ת, המופיעה במפורש בהנחות האינדוקציה הרגילה.

1.3 תרגיל. זה עתה הראינו, ע"י השוואת שני העקרונות, שעקרון האינדוקציה המלאה חזק יותר. הוכח באופן ישיר את עקרון האינדוקציה הרגילה מעקרון האינדוקציה המלאה.

איך נוכיח את עקרון האינדוקציה המלאה? זה תלוי באקסיומות שאנו יוצאים מהן. מה שנעשה כאן הוא שנוכיח את עקרון האינדוקציה המלאה מעקרון האינדוקציה הרגילה. לכן יתברר שעקרונות אלו שקולים זה לזה כי ניתן להוכיח כל אחד משניהם ממשנהו. אם כן מדוע טענו לעיל שעקרון האינדוקציה המלאה חזק יותר? כאשר אנו אומרים במתימטיקה שטענה ϕ חזקה מטענה ψ אנו מתכוונים לאחד משני הדברים הבאים. אפשרות אחת היא שכל אימת ש-ϕ קיימת גם ψ קיימת, אבל ישנן נסיבות שבהן ψ קיימת מבלי ש-ϕ קיימת. במקרה זה כמובן שלא ניתן להוכיח את ϕ מתוך ψ. האפשרות השניה היא שמן הניסוח של הטענות ϕ ו-ψ רואים מיד, או לאחר שיקול פשוט, ש-ϕ דורשת את כל מה ש-ψ דורשת ועוד משהו יותר. במקרה זה יתכן שבדיקה מעמיקה יותר תראה שאפשר גם להוכיח את ϕ מתוך ψ, ולכן שתי הטענות שקולות זו לזו. לאיזו משתי אפשרויות אלו מתכוונים בכל מקרה? הדבר צריך להיות ברור מן ההסברים המלווים את מה שאמרנו. במקרה הנוכחי של השוואת שני עקרונות האינדוקציה ברור הוא שהתכוונו לאפשרות השניה.

1.4 משפט. עקרון האינדוקציה הרגילה גורר את עקרון האינדוקציה המלאה.

הוכחה. כדי להוכיח את עקרון האינדוקציה המלאה עלינו להראות שאם שלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה מתקיים לכל n אז כל מספר טבעי הוא בעל התכונה **ת**. לכן נצא עתה מן ההנחה ששלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה מתקיים לכל n ונוכיח שכל מספר טבעי הוא בעל התכונה **ת**. נאמר שלמספר טבעי ישנה התכונה **ש** אם לכל מספר טבעי הקטן מ-n ישנה התכונה **ת**. כך, המספר 3 הוא בעל התכונה **ש** אם כל המספרים $0,1,2$ הם בעלי התכונה **ת**. נוכיח עתה באינדוקציה רגילה כי כל מספר טבעי n הוא בעל התכונה **ש**. ל-$n=0$ ישנה התכונה **ש** כי זה נכון, באופן ריק, כי כל מספר טבעי הקטן מ-0 הוא בעל התכונה **ת**. אם למספר n ישנה התכונה **ש** אז זה אומר שלכל מספר טבעי הקטן מ-n ישנה התכונה **ת**, ולפי שלב האינדוקציה של האינדוקציה המלאה, אשר הנחנו שהוא מתקיים, גם n הוא בעל התכונה **ת**. לכן כל מספר טבעי הקטן מ-$n+1$ הוא בעל התכונה **ת**, כלומר גם $n+1$ הוא בעל התכונה **ש**. כך הוכחנו עד עתה כי 0 הוא בעל התכונה **ש** ולכל מספר טבעי n אם n הוא בעל התכונה **ש** אז גם $n+1$ הוא בעל התכונה **ש**. לפי עקרון האינדוקציה הרגילה ביחס לתכונה **ש** כל מספר טבעי הוא בעל התכונה **ש**. במיוחד, בהנתן מספר טבעי n גם $n+1$ הוא בעל התכונה **ש** ולכן n, הקטן מ-$n+1$, הוא בעל התכונה **ת**. כך הוכחנו שכל מספר טבעי n הוא בעל התכונה **ת**.

1.4.1 תרגיל. נתון המשחק הבא בו משחקים שני שחקנים. על השולחן נמצאת ערימה של n לוחיות. השחקנים משחקים לסירוגין וכל שחקן לוקח בתורו בין אחת לשלוש לוחיות. מנצח השחקן שלקח את הלוחיות האחרונות. הוכח באינדוקציה על n כי השחקן המתחיל מנצח במשחק זה אםם n אינו מתחלק ב-4. איזו אינדוקציה היא האינדוקציה המתאימה להוכחה זאת, אינדוקציה רגילה או אינדוקציה מלאה? מהם במקרה זה הנחת האינדוקציה, שלב האינדוקציה ומסקנת שלב האינדוקציה?

איברים נוצרים באלגברה

במתימטיקה אנו עוסקים פעמים רבות בקבוצה עם פעולות עליה ואנו מסתכלים על העצמים המתקבלים מעצמים נתונים ע"י הפעולות. למשל, תהי R קבוצת המספרים הממשיים. נצא מן המספר 1 ונתבונן בקבוצת המספרים המתקבלים מ-1 ע"י מספר כלשהו של פעולות חיבור וחיסור. ברור שקבוצה זאת היא קבוצת המספרים השלמים. אם נסתכל בקבוצת המספרים המתקבלים מ-1 ע"י מספר כלשהו של פעולות חיבור, חיסור, כפל וחילוק (ובלבד שלא נחלק ב-0) נקבל את קבוצת המספרים הרציונליים. באופן כללי, אם נתון שדה S וקבוצה $W\neq\emptyset$ של איברי S כי אז קבוצת כל איברי S המתקבלים מאיברי W ע"י מספר כלשהו של פעולות חיבור חיסור וכפל מהווה תחום שלמות, וקבוצת כל איברי S המתקבלים מאיברי W ע"י מספר כלשהו של פעולות חיבור חיסור כפל וחילוק מהווה תת-שדה של S. דוגמה נוספת לקבלת עצמים מעצמים נתונים ע"י פעולות היא הבאה: אנו יוצאים מקבוצת פונקציות של משתנה ממשי אחד שאיבריה הם הפונקציות הקבועות, פונקצית הזהות (זאת הפונקציה הנתונה ע"י $f(x)=x$ לכל

מספר ממשי x), הפונקציות e^x ו-$\log$, הפונקציות הטריגונומטריות $\sin, \cos, \tan$ והפונקציות ההפוכות להן ואנו מסתכלים בקבוצת כל הפונקציות המתקבלות מהן ע"י מספר כלשהו של פעולות חיבור, כפל, חילוק, חזקה והרכבה. לקבוצת הפונקציות המתקבלת מקובל לקרוא קבוצת הפונקציות האלמנטריות. נדגיש שכאן הפונקציות הן האיברים בקבוצה והפעולות פועלות על קבוצת הפונקציות. למשל, פעולת ההרכבה של שתי פונקציות נותנת את הפונקציה $\sin\log$ מן הפונקציות $\sin$ ו-$\log$.

נגדיר עתה באופן מדוייק את התהליך שתארנו זה עתה.

1.5 הגדרה. תהי A קבוצה. f נקראת פעולה n-מקומית על A (n-ary operation on A), אם f היא פונקציה שתחומה היא הקבוצה A^n, שהיא קבוצת ה-n-יות של איברי A, וטווחה חלקי ל-A. נכתוב זאת גם כ- $f : A^n \to A$. את הערך ש-f נותנת לסדרה $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$ אנו כותבים כ- $f(a_1, \ldots, a_n)$. אנו אומרים ש-f היא פעולה על A אם עבור n כלשהו f היא פעולה n-מקומית על A, ו-n זה נקרא מספר המקומות של f.

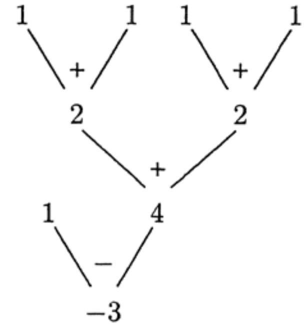
נקדיש תשומת לב מיוחדת למקרה בו $n = 0$. יש רק 0-יה אחת של איברי A והיא הסדרה הריקה שאותה נסמן ב-$\langle\rangle$. אם f פעולה 0-מקומית על A אז הערך $f()$ ש-f נותנת לסדרה הריקה מוגדר, והוא איבר של A. ברור מכאן שפעולה 0-מקומית על A מהווה פשוט ציון של איבר מסויים של A שהוא הערך $f()$. את האיבר הזה נסמן, במקום ב-$f()$, פשוט ב-f. (אמנם f מסמנת עתה שני דברים שונים, פעולה 0-מקומית והערך של אותה פעולה שהוא איבר של A, אולם ההבחנה בין שני דברים אלו אינה חשובה במיוחד). לכן במקום לדבר על פעולה 0-מקומית על A אנו יכולים גם לדבר על קבוע (constant) ב-A. היכן שנרצה לדבר במיוחד על פעולות 0-מקומיות נשתמש בדרך כלל במונח "קבוע" ולא במונח "פעולה 0-מקומית" אבל היכן שנדבר באופן כללי על פעולות נכלול בהן גם את הפעולות ה-0-מקומיות, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

לעתים נזדקק גם לפעולות שאינן מוגדרות לכל ה-n-יות של האיברים. הדוגמא המיידית לכך היא פעולת החילוק במספרים הממשיים שאינה מוגדרת כאשר המחלק הוא 0. לכן נאמר, עבור $n > 0$ ש-f היא פעולה n-מקומית חלקית על A (partial n-ary operation on A) אם f היא פונקציה שתחומה היא קבוצה חלקית של A^n וטווחה חלקי ל-A. איננו מגדירים את המושג של פעולה 0-מקומית חלקית כי הפעולות ה-0-מקומיות החלקיות שאינן פעולות הן טריביאליות ואין בהן כל ענין. אם f היא פעולה n-מקומית חלקית על A אז הביטוי $f(a_1, \ldots, a_n)$ אינו מוגדר לכל n-יה $a_1, \ldots, a_n$ אלא רק לאותן n-יות הנמצאות בתחום f. כאשר בהמשך נאמר משהו על $f(a_1, \ldots, a_n)$ נתכוון בכך רק למקרה בו $f(a_1, \ldots, a_n)$ מוגדר. אנו נעיר על כך במפורש עוד מספר קטן של פעמים, אולם לאחר מכן נקבל את זה כמובן מאליו. נשים לב שכל פעולה f על A היא גם פעולה חלקית על A, כי כשאמרנו בהגדרת המושג של פעולה חלקית על A שתחום f הוא קבוצה חלקית של A^n לא הוצאנו מן הכלל את האפשרות שתחום זה הוא כל הקבוצה A^n. מאידך, פעולות כגון פעולת החילוק במספרים הממשיים הן פעולות חלקיות שאינן פעולות. אנו נשתמש לעתים תכופות במונח "פעולה" גם לפעולה חלקית, ואם נרצה באותו הקשר להדגיש שמדובר בפעולות בלבד ולא בפעולות חלקיות בכלל נשתמש במונח "פעולה מלאה". נקפיד להשתמש במונחים השונים כך שלא תהיינה אי הבנות.

1.6 הגדרה. אלגברה זהו זוג $\mathcal{A} = \langle A, W\rangle$ בו A היא קבוצה לא ריקה, הנקראת העולם של $\mathcal{A}$, ו-W קבוצת פעולות חלקיות על A. הפעולות (החלקיות) $f \in W$ נקראות הפעולות של $\mathcal{A}$ והפעולות ה-0- מקומיות $f()$ של $\mathcal{A}$ נקראות הקבועים של $\mathcal{A}$.

נשים לב שאת האלגברה, שהיא זוג, אנו מסמנים באות בעלת סגנון מיוחד ואת העולם שלה, שהוא קבוצה לא ריקה של עצמים, אנו מסמנים באותה אות בסגנון רגיל. נעשה זאת בהמשך באופן עקבי כך שאם, למשל, נשתמש באות $\mathcal{B}$ לאלגברה אז נבין מיד ש-B מציין את העולם של $\mathcal{B}$ מבלי שנציין זאת במפורש.

אם אנו אומרים, למשל, שהאיבר $a \in A$ הוא קבוע של $\mathcal{A}$ אנו מתכוונים לכך שיש ב-$\mathcal{A}$ קבוע f שערכו הוא a, כלומר פעולה 0-מקומית f כך ש- $f() = a$.



טבלה 1

1.7 נאמר, באופן לא פורמלי, ש-a הוא איבר נוצר (generated) באלגברה $\mathcal{A}$ אם הוא מתקבל ע"י מספר סופי כלשהו של הפעולות של $\mathcal{A}$. כדי שיהיו בכלל איברים נוצרים של $\mathcal{A}$ דרוש שי-היה לנו ממה להתחיל, כלומר שיהיו ל-$\mathcal{A}$ קבועים (פעולות 0-מקומיות). למשל, תהי A קבוצת המספרים הממשיים, יהי $c_0()$ הקבוע 1 ותהי-ינה $f_1(x,y)$ ו-$f_2(x,y)$ פעולות החיבור והחיסור. המספר -3, שהוא $1-((1+1)+(1+1))$ נוצר ב-$\mathcal{A}$, ואת זאת רואים בברור כאשר כותבים אותו כ-$f_2(c_0, f_1(f_1(c_0,c_0), f_1(c_0,c_0)))$ ובאופן מפורש יותר כ- $f_2(c_0(), f_1(f_1(c_0(),c_0()), f_1(c_0(),c_0())))$. תאור גרפי של הדרך בה מתקבל המספר -3 נמצא בטבלה 1.

נסביר עתה עץ זה. בצידו השמאלי העליון נמצא המספר 1 פעמיים והמקומות בהם הוא נמצא מחוברים בקטעים ישרים למקום בו כתוב המספר 2, כאשר מעל למספר 2 כתוב +. המספר 1 הוא קבוע של $\mathcal{A}$, כלומר, הוא מתקבל ע"י פעולה 0-מקומית שאינה זקוקה לאיברים כלשהם כדי לפעול עליהם. מן המספר 1, הנמצא כאן פעמיים מתקבל המספר 2 ע"י פעולת החיבור, אותה מציין ה-+ מעל ל-2. באותו אופן מתקבל 4 מ-2 ומ-2 ע"י פעולת החיבור, ו--3 מתקבל מ-1 ומ- 4 ע"י פעולת החיסור.

ניגש עתה להגדיר באופן מדוייק את מושג האיבר הנוצר באלגברה $\mathcal{A}$. כפי שנראה בהמשך, ההגדרה הקולעת ביותר היא זאת המחקה את ציור העץ בטבלה 1, אולם אנו נביא תחילה הגדרות פשוטות יותר. כדי לגשת להגדרה הראשונה שנביא נשוב לטבלה 1 ולא נעתיק אותה אלא תוך התבוננות בה נרשום את הסדרה $1,2,4,-3$. באיזה מובן מעידה סדרה זאת על כך שהמספר -3 נוצר ב-$\mathcal{A}$? נעבור על איברי סדרה זאת אחד לאחד. המספר 1 הוא קבוע של $\mathcal{A}$; המספר 2 מתקבל מ-1 ע"י חיבור כ- $1+1$; המספר 4 מתקבל מ-2 ע"י חיבור כ- $2+2$; ולבסוף, המספר -3 מתקבל מ-1 ומ-4 ע"י חיסור כ- $1-4$. כך מראה הסדרה, בתוספת ההסבר שנתנו, כי -3 מתקבל ע"י מספר סופי של הפעולות של $\mathcal{A}$. מה הלך לאיבוד כאשר עברנו מן העץ של טבלה 1 לסדרה $1,2,4,-3$? כשראינו את העץ של טבלה 1 היה לנו ברור מאילו איברים מתקבל כל איבר ואילו בסדרה אנו רק יודעים שכל איבר מתקבל מאיברים קודמים בסדרה, אבל איננו יודעים מאילו איברים. בשלב הנוכחי זה אינו מפריע לנו ואנו נגדיר כדלקמן.

1.8 הגדרה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה. אנו אומרים ש-a איבר נוצר ב- $\mathcal{A}$ אם $a \in A$ וקיימת סדרה $a_1,\ldots,a_k$ של איברי A שאיברה האחרון הוא a, כלומר $a_k = a$, ולכל $1 \le i \le k$ קיימים $n \ge 0$, פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ומספרים $1 \le j_1,\ldots,j_n < i$ כך ש- $a_i = f(a_{j_1},\ldots,a_{j_n})$. במלים אחרות, כל איבר של הסדרה $a_1,\ldots,a_k$ מתקבל ע"י אחת מפעולות $\mathcal{A}$ מאיברים קודמים של הסדרה, שהם לאו דווקא שונים זה מזה.

לסדרה $\langle a_1,\ldots,a_k\rangle$ המקיימת את התנאי דלעיל אנו קוראים סדרת יצירה, ואם אנו רוצים להדגיש שאיברה האחרון הוא a אנו קוראים לה סדרת יצירה ל-a.

שים לב שבין הפעולות בהם אנו דנים יכולות להיות גם פעולות 0-מקומיות. יתר על כן, כדי שבכלל יהיו איברים נוצרים חייבות להיות באלגברה פעולות כאלו; האיבר הראשון a_1 של סדרת יצירה יכול להתקבל רק ע"י פעולה 0-מקומית כי הוא איננו יכול להתקבל ע"י פעולה עם יותר מקומות מאיברים קודמים של הסדרה כי אין כאלו.

אם אנו רוצים לטפל בנפרד בפעולות ה-0-מקומיות אנו יכולים לנסח את הדרישה מן הסדרה $a_1,\ldots,a_k$ כדלקמן. לכל $1 \le i \le k$ קיימת (לפחות) אחת משתי האפשרויות הבאות:

א. a_i קבוע של $\mathcal{A}$.

ב. קיימים $n \ge 1$, פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ו- $1 \le j_1,\ldots,j_n < i$ כך ש- $a_i = f(a_{j_1},\ldots,a_{j_n})$.

1.8.1 תרגיל. מיהם בדיוק האיברים הנוצרים באלגבראות $\mathcal{A}$ הבאות?

א. האלגברה $\mathcal{A}$ של 1.7.

ב. A היא קבוצת כל המספרים הממשיים, הקבועים הם 0 ו-1 והפעולה היחידה של $\mathcal{A}$ (פרט לקבועים) היא החיבור.

ג. כמו ב', רק שהקבוע היחיד הוא 1 והפעולה היחידה היא החיסור.
ד. כמו ב', רק שנוספת גם פעולת הכפל.
ה. כמו ג', רק שנוספת גם פעולת החילוק.
ו. A היא קבוצת כל המספרים המרוכבים, הקבועים הם $1, i$ והפעולה היחידה היא פעולת החיסור.
ז. כמו ה', רק שנוסף הקבוע $\sqrt{2}$.

1.8.2 תרגיל הוכחה. א. תהי $a_1, \ldots, a_k$ סדרת יצירה ויהי $1 \leq m < k$.
א. גם $a_1, \ldots, a_m$ היא סדרת יצירה.
ב. a_m הוא איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$, כלומר, כל האיברים של סדרת יצירה הם איברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$.

1.9 משפט. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה.
א. כל קבוע של $\mathcal{A}$ הוא איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$.
ב. אם $n \geq 0$, f פעולה n-מקומית של $\mathcal{A}$ ו- $b_1, \ldots, b_n$ הם איברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$ אז גם $f(b_1, \ldots, b_n)$ הוא איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$. (שים לב שהמקרה $n = 0$ הוא בדיוק חלק א').

הוכחה. כפי שהערנו לעיל, חלק ב' כולל את כל המשפט. יהי $1 \leq i \leq n$, אז היות ו-b_i איבר נוצר קיימת סדרת יצירה ל-b_i. יהי k_i האורך של סדרת יצירה כזאת, אז אנו יכולים לסמן את הסדרה ב- $c_{i,1}, \ldots, c_{i,k_i}$. היות וזאת סדרת יצירה ל-b_i איברה האחרון הוא b_i, כלומר $c_{i,k_i} = b_i$. ניצור את הסדרה הבאה (1) ע"י שנשים סדרות יצירה אלו אחת אחרי השניה ואחריהן נשים את $f(b_1, \ldots, b_n)$.

$$c_{1,1}, \ldots, c_{1,k_1}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,k_2}, \ldots, c_{n,1}, \ldots, c_{n,k_n}, f(b_1, \ldots, b_n) \tag{1}$$

נראה עתה כי (1) היא סדרת יצירה ל-$f(b_1, \ldots, b_n)$, ובכך נוכיח כי $f(b_1, \ldots, b_n)$ נוצר ב-$\mathcal{A}$.

נתבונן באיבר כלשהו של הסדרה (1) פרט לאחרון. איבר כזה הוא $c_{i,j}$ כאשר $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq k_i$. היות והסדרה $c_{i,1}, \ldots, c_{i,k_i}$ היא סדרת יצירה, איבר זה מתקבל מאיברים קודמים של הסדרה $c_{i,1}, \ldots, c_{i,k_i}$ ע"י אחת מפעולות $\mathcal{A}$. אותם האיברים הקודמים ל-$c_{i,j}$ בסדרה $c_{i,1}, \ldots, c_{i,k_i}$ הם גם קודמים ל-$c_{i,j}$ בסדרה (1) כי הם לקוחים מבין $c_{i,1}, \ldots, c_{i,j-1}$ המופיעים גם ב-(1) לפני $c_{i,j}$. לכן קי-ימת לגבי האיבר $c_{i,j}$ הדרישה ש-(1) היא סדרת יצירה. נותר לנו עתה רק להוכיח זאת עבור $f(b_1, \ldots, b_n)$ שהוא האיבר האחרון ב-(1). לכל $1 \leq i \leq n$ קיים $b_i = c_{i,k_i}$ ולכן $b_1, \ldots, b_n$ מופיעים בסדרה (1) לפני המקום האחרון והיות ו-f היא אחת מפעולות $\mathcal{A}$ לכן גם האיבר האחרון ב- (1) מקיים את הדרישה ש-(1) היא סדרת יצירה.

1.13 הגדרה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ו-ת תכונה. אנו אומרים ש-ת היא תכונה אינדוקטיבית ב-$\mathcal{A}$ אם קיים לכל $n \geq 0$, לכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ולכל $a_1, \ldots, a_n \in A$ אם $a_1, \ldots, a_n$ הם בעלי התכונה ת אז גם $f(a_1, \ldots, a_n)$ הוא בעל התכונה ת (אם $f(a_1, \ldots, a_n)$ מוגדר). שים לב שהמקרה $n = 0$ של דרישה זאת אומר במישרין שכל קבוע של $\mathcal{A}$ הוא בעל התכונה ת.

דוגמאות. תהי $\mathcal{A}$ קבוצת המספרים המרוכבים עם הקבועים $0, 1$ ועם הפעולות הדו-מקומיות של חיבור חיסור וכפל. התכונות הבאות של $a \in A$ הן אינדוקטיביות: a מספר שלם, a מספר רציונלי, a מספר ממשי, a מספר שלם של גאוס (כלומר a הוא $b + ci$, כאשר b, c שלמים). התכונה "a מספר אי-שלילי" אינה אינדוקטיבית כי הפרש של שני מספרים אי-שליליים אינו בהכרח אי-שלילי, כמו למשל ב- $2 - 1$.

1.14 עקרון האינדוקציה על העצמים הנוצרים. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ותהי ת תכונה אינדוקטיבית ב-$\mathcal{A}$, אז כל איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$ הוא בעל התכונה ת.

הוכחה. יהי a איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$. לכן קיימת לו סדרת יצירה $a_1, \ldots, a_k$. אנו נוכיח באינדוקציה מלאה על $1 \leq i \leq k$ כי a_i הוא בעל התכונה ת. די בזה כדי להוכיח את המשפט כי זה אומר לנו שבמיוחד גם a_k הוא בעל התכונה ת, ו- a_k הוא a עצמו.

יהי $1 \leq i \leq k$. אז מכיוון ש- $a_1, \ldots, a_k$ סדרת יצירה קיימים $n \geq 0$, פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ו- $1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$ כך ש- $a_i = f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$. הנחת האינדוקציה (המלאה) היא שלכל $l < i$ a_l הוא בעל התכונה ת, ולכן $a_{j_1}, \ldots a_{j_n}$ כולם בעלי התכונה ת. היות ו-ת אינדוקטיבית ב-$\mathcal{A}$

גם $f(a_{j_1},\dots,a_{j_n})$ הוא בעל התכונה **ת**, כלומר, גם a_i הוא בעל התכונה **ת**. בזה הוכחנו את מסקנת שלב האינדוקציה.

איך מתאימה ההוכחה באינדוקציה מלאה על $1 \le i \le n$ שנתנו זה עתה לעקרון האינדוקציה המלאה ב-1.2, כלומר מהי התכונה אותה הוכחנו באינדוקציה מלאה? את מה שעשינו זה עתה ניתן לתאר כהוכחה באינדוקציה מלאה שלכל מספר טבעי i ישנה התכונה **ש** שהיא "אם $1 \le i \le k$ אז a_i הוא בעל התכונה **ת**" או, במלים אחרות, "i אינו מקיים את $1 \le i \le k$ או ש-a_i הוא בעל התכונה **ת**". כמובן שבהוכחה היינו צריכים לטרוח רק בשביל המספרים i המקיימים $1 \le i \le k$ כי עבור המספרים i האחרים התכונה **ש** קיימת באופן טריביאלי.

1.15 תרגיל. הראה שעקרון האינדוקציה הרגילה על המספרים הטבעיים הוא מקרה פרטי של עקרון האינדוקציה על העצמים הנוצרים. עשה זאת ע"י שתמצא אלגברה מסויימת שעקרון האינדוקציה על העצמים הנוצרים בה הוא בדיוק עקרון האינדוקציה הרגילה על המספרים הטבעיים.

1.16 תרגיל. בתרגיל 1.8.1 הוכחת עבור מספר אלגבראות יצירה $\mathcal{A}$ שונות שקבוצה מסויימת, שנקרא לה כאן B, היא קבוצת העצמים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$. חזור עתה על כוון אחד של כל אחת מהוכחות אלו, והוא הכוון שכל העצמים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ נמצאים ב-B, תוך שימוש בעקרון האינדוקציה על העצמים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$.

1.16.1 תרגיל. תהי $\mathcal{A}$ האלגברה שהעולם שלה הוא $R[x]$, שהיא קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים, ושיש לה קבוע אחד שהוא הפונקציה הקבועה 0 ושלוש פעולות חד-מקומיות f_1, f_2, f_3 המוגדרות כדלקמן. לכל פולינום $p \in R[x]$

$$f_1(p) = p+1, \qquad f_2(p) = p-1, \qquad f_3(p) = \int_0^x p(x)dx$$

כלומר $f_3(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$. מהם האיברים הנוצרים באלגברה זאת?

1.17 תרגיל. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ותהי $B \subseteq A$. אנו אומרים ש-B היא קבוצה סגורה (תחת הפעולות) ב-$\mathcal{A}$ אם לכל $n \ge 0$, לכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ולכל $a_1,\dots,a_n \in B$ גם $f(a_1,\dots,a_n) \in B$ (זה, כמובן, בתנאי ש-$f(a_1,\dots,a_n)$ מוגדר). במלים אחרות, B מכילה את כל הקבועים של $\mathcal{A}$ (כי עבור $n=0$ הדרישה $a_1,\dots,a_n \in B$ אינה קיימת ולכן אם B סגורה אז $f() \in B$) ולכל $n \ge 1$ אם $a_1,\dots,a_n \in B$ אז גם $f(a_1,\dots,a_n) \in B$, אם $f(a_1,\dots,a_n)$ מוגדר.

א. מתי הקבוצה הריקה $\emptyset$ סגורה ב-$\mathcal{A}$?

ב. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה כך ש-A היא קבוצת המספרים השלמים וב-$\mathcal{A}$ ישנם רק קבוע אחד שהוא 1 ופעולה דו-מקומית אחת שהיא החיבור. מהן כל הקבוצות הסגורות ב-$\mathcal{A}$?

ג. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ותהי W קבוצה לא ריקה של קבוצות סגורות ב-$\mathcal{A}$. גם החיתוך $\bigcap W$ של איברי W הוא קבוצה סגורה ב-$\mathcal{A}$.

ד. קבוצת כל האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ היא סגורה ב-$\mathcal{A}$.

ה. כל קבוצה B שהיא סגורה באלגברה $\mathcal{A}$ מכילה כל איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$.

ו. באלגברה $\mathcal{A}$, $a \in A$ הוא נוצר ב-$\mathcal{A}$ אםם a הוא איבר של כל קבוצה B הסגורה ב-$\mathcal{A}$. עובדה זאת מאפשרת לתת הגדרה חילופית למושג האיבר הנוצר ב-$\mathcal{A}$ כאיבר הנמצא בכל קבוצה B הסגורה ב-$\mathcal{A}$.

1.19 תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ו- $D \subseteq A$. האיברים הנוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$ הם האיברים המתקבלים מאיברי D ע"י מספר סופי של הפעולות של $\mathcal{A}$. ישנן שתי דרכים, השונות זו מזו רק במעט, להגדיר מושג זה. אפשר לתת הגדרה ישירה של מושג זה, כפי שנעשה מיד ב-1.20. אפשרות שניה היא להתבונן באלגברה $\mathcal{A}_D$ שהיא כמו $\mathcal{A}$ רק שבנוסף על קבועי $\mathcal{A}$ היא מכילה גם קבועים עבור כל איברי D, כלומר עבור כל $d \in D$ $\mathcal{A}_D$ מכילה פונקציה 0-מקומית f_d כך ש- $f_d() = d$. אז נקבע שהאיברים הנוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$ הם פשוט האיברים הנוצרים באלגברה $\mathcal{A}_D$. במקרה זה אנו יכולים כמובן להשתמש בכל מה שהוכחנו עד כה על האיברים הנוצרים באלגברה כי $\mathcal{A}_D$ היא אלגברה לכל דבר.

1.20 הגדרה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ו-$D \subseteq A$. אנו אומרים ש-a איבר נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$ אם $a \in A$ וקיימת סדרה $a_1,\dots,a_k$ של איברי A שאיברה האחרון הוא a, כלומר $a_k = a$, ולכל $1 \le i \le k$ או ש- $a_i \in D$ או

שקיימים $n \geq 0$, פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ומספרים $1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$ כך ש-$a_i = f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$. במלים אחרות, כל איבר של הסדרה $a_1, \ldots, a_k$ הוא איבר של D או שהוא מתקבל ע"י אחת מפעולות $\mathcal{A}$ מאיברים קודמים של הסדרה. סדרה כזאת נקראת סדרת יצירה ל-a מהקבוצה D.

אנו יכולים גם לנסח את הדרישה מסדרת היצירה $a_1, \ldots, a_k$ מ-D כדלקמן. לכל $1 \leq i \leq k$ קיימת (לפחות) אחת משלוש האפשרויות הבאות:

א. $a_i \in D$.

ב. a_i קבוע של $\mathcal{A}$.

ג. קיימים $n \geq 1$, פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ו- $1 \leq j_1, \ldots, j_n < i$ כך ש- $a_i = f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$.

1.20.1 תרגיל. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה שהעולם שלה A הוא קבוצת המספרים המרוכבים והפעולות שלה הן חיבור, חיסור, כפל וחילוק. מהי קבוצת האיברים הנוצרים מן הקבוצה D כאשר D היא: א. הקבוצה הריקה, ב. $\{1\}$, ג. $\{\sqrt{2}\}$, ד. $\{i\}$, ה. הקבוצה $R \cup \{i\}$, כאשר R היא קבוצת המספרים הממשיים.

תהי $\mathcal{A}$ האלגברה שהעולם שלה A הוא קבוצת כל הוקטורים במרחב וקטורי מעל לממשיים. ל-$\mathcal{A}$ יש קבוע אחד שהוא וקטור האפס, לכל מספר ממשי r פעולה חד-מקומית f_r שהיא פעולת ההכפלה של הוקטור בסקלר r, ופעולת החיבור הדו-מקומית.

ו. מהי קבוצת האיברים הנוצרים מן הקבוצה $\{a_1, \ldots, a_n\}$?

ז. מהי קבוצת האיברים הנוצרים מקבוצה D כללית?

1.21 תרגיל הוכחה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ותהי $D \subseteq A$. הוכח את א'–ה' ע"י חיקוי ההוכחות של המשפטים המתאימים מבין 1.5–1.18.

א. a נוצר מ-$\emptyset$ ב-$\mathcal{A}$ אסם a הוא איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$.

ב. כל איבר של D נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$. כל קבוע של $\mathcal{A}$ נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$. אם $n \geq 0$, f פעולה n-מקומית של $\mathcal{A}$ ו- $b_1, \ldots, b_n$ הם איברים נוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$ אז גם $f(b_1, \ldots, b_n)$ הוא איבר נוצר מ-D ב- $\mathcal{A}$.

ג. עקרון האינדוקציה על העצמים הנוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$. תהי ת תכונה אינדוקטיבית ב-$\mathcal{A}$. אם כל איבר ב-D הוא בעל התכונה ת אז כל איבר נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$ הוא בעל התכונה ת.

ד. אם $D' \subseteq D$ אז כל איבר נוצר מ-D' ב-$\mathcal{A}$ נוצר גם מ-D ב-$\mathcal{A}$.

ה. אם $E \subseteq A$ וכל איברי E נוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$ אז כל איבר נוצר מ-E ב-$\mathcal{A}$ נוצר גם מ-D ב-$\mathcal{A}$.

ו. אם a איבר נוצר מ-D אז קיימת קבוצה סופית D' חלקית ל-D כך ש-a נוצר מ-D'.

ז. כל קבוצה B שהיא מקיפה את D וסגורה באלגברה $\mathcal{A}$ מכילה כל איבר נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$.

ח. באלגברה $\mathcal{A}$, $a \in A$ הוא נוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$ אסם a הוא איבר של כל קבוצה B המקיפה את D וסגורה ב-$\mathcal{A}$. עובדה זאת מאפשרת לתת הגדרה חילופית למושג האיבר הנוצר מ-D ב-$\mathcal{A}$ כאיבר הנמצא בכל קבוצה $B \supseteq D$ הסגורה ב-$\mathcal{A}$.

ט. קבוצת האיברים הנוצרים מ-D ב-$\mathcal{A}$ היא הקבוצה החלקית המזערית של A המקיפה את D ושהנה סגורה ב-$\mathcal{A}$.

הגדרה ברקורסיה

מושג מתימטי הדומה להוכחה באינדוקציה אבל אינו זהה לו הוא הגדרה ברקורסיה. נתבונן למשל בהגדרה הבאה של סדרת Fibonacci. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ועבור $n \geq 2$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. מקובל לקרוא להגדרה כזאת גם "הגדרה באינדוקציה", אבל זאת לא אינדוקציה במובן שראינו ב-1.1 וב-1.2. כאן מה שאנו עושים זה לא שאנו טוענים שקיים הקשר $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ בין האיבר ה-n של הסדרה לבין איברים קודמים לו ומוכיחים זאת באינדוקציה, אלא שאנו מגדירים סדרה חדשה שלא היתה מוגדרת לפני שעשינו זאת. תאור מלא של מה שאנו עושים כאן הוא שאנו טוענים שקיימת סדרה $a_1, a_2, \ldots$ כך ש- $a_1 = a_2 = 1$ ולכל $n \geq 2$ קיים $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$. כך, בניגוד למקרה של הוכחה באינדוקציה בו אנו יודעים מראש כי לכל n או שהוא בעל התכונה ת, אותה אנו מוכיחים באינדוקציה, או שאינו בעל תכונה זאת ומה שאנו עושים זה שאנו מוכיחים ש-n הוא אמנם בעל התכונה ת, במקרה של הגדרה ברקורסיה התפקיד שלנו הוא יותר רחב והוא להוכיח שאמנם קיימת סדרה $a_1, a_2, \ldots$ המקיימת את התנאים. לפני

שניגש לשאלת הנכונות של עקרון ההגדרה ברקורסיה ניתן ניסוח מדוייק של עקרון זה, כאשר נעשה זאת עתה עבור המספרים הטבעיים ובמקום להשתמש במונח "סדרה" נשתמש במונח "פונקציה שתחומה הוא קבוצת המספרים הטבעיים".

כמו לגבי האינדוקציה ניתן גם לגבי הרקורסיה להבחין בין רקורסיה רגילה ההולכת ממספר טבעי למספר הטבעי העוקב לו לבין רקורסיה מלאה ההולכת מכל המספרים הטבעיים הקטנים ממספר n אל המספר הטבעי n. בשלב זה נעסוק רק בהגדרה ברקורסיה רגילה. כאן אנו מגדירים פונקציה h שתחומה הוא קבוצת המספרים הטבעיים. את הערך ההתחלתי $h(0)$ של h אנו קובעים במפורש. עבור $n > 0$ הערך $h(n)$ מתקבל ע"י חישוב מן הערך $h(n-1)$. למשל, נגדיר ברקורסיה את הפונקציה $h(n) = 2^n$. הערך ההתחלתי הוא $h(0) = 1$. עבור $n > 0$ הערך $h(n)$ מתקבל מ-$h(n-1)$ ע"י הכפלתו ב-2, כלומר $h(n) = 2 \cdot h(n-1)$. לכן ההגדרה ברקורסיה של פונקציה h זאת היא: "$h(0) = 1$, ועבור $n > 0$ $h(n) = 2 \cdot h(n-1)$". נתבונן עתה בהגדרה ברקורסיה של הפונקציה $h(n) = n!$. כאן ההגדרה היא "$h(0) = 1$, ועבור $n > 0$ $h(n) = n \cdot h(n-1)$". בדוגמא הראשונה התקבל $h(n)$ מ-$h(n-1)$ ע"י הפעולה של כפל ב-2, כלומר $h(n)$ היה תלוי, באמצעות פעולה זאת, רק ב-$h(n-1)$. בדוגמא השניה התקבל $h(n)$ ע"י הכפלת $h(n-1)$ ב-n, כלומר הוא היה תלוי גם ב-$h(n-1)$ וגם ב-n. תלות זאת של $h(n)$ ב-n וב-$h(n-1)$ ניתנת במקרה הכללי ע"י פונקציה g של שני משתנים, נאמר $g(n,t)$, הקובעת כיצד מתקבל $h(n)$ מ-n ומ-$h(n-1)$. נקרא ל-g זאת פונקצית המעבר. ב-$g(n,t)$ t הוא המשתנה אשר עבורו אנו מציבים את $h(n-1)$. כך במקרה של הגדרת הפונקציה $n!$ g היא הפונקציה הנתונה ע"י $g(n,t) = n \cdot t$, כלומר, היא קובעת שהפעולה שיש לבצע כדי לקבל את $h(n)$ היא לכפול את n ב-t, כאשר t מקבל את הערך $h(n-1)$. במקרה של הפונקציה 2^n n אינו משפיע ישירות על $h(n)$ ולכן $g(n,t) = 2 \cdot t$. ב-$g(n,t)$ המשתנה n עובר על המספרים הטבעיים (כאשר אפשר גם להסתפק בחיוביים בלבד) בעוד המשתנה t עובר על קבוצה המכילה את ערכי h וזאת אינה בהכרח קבוצת המספרים הטבעיים.

1.22 עקרון ההגדרה ברקורסיה רגילה (definition by recursion) **למספרים הטבעיים**. את קבוצת המספרים הטבעיים אנו מסמנים ב-ω. תהי B קבוצה, שנקרא לה קבוצת המטרה (כי ערכי הפונקציה המתקבלת h יהיו בתוכה), יהי $j \in B$ (j הוא הערך המיועד של $h(0)$) ותהי $g : \omega \times B \to B$, כלומר g פונקציה על קבוצת הזוגות של מספר טבעי ואיבר B לתוך הקבוצה B (g היא פונקצית המעבר המיועדת). אז קיימת פונקציה $h : \omega \to B$ יחידה כך ש- $h(0) = j$ ולכל $n > 0$ $h(n) = g(n, h(n-1))$.

הוכחתו של עקרון זה תובא בתרגיל 1.31 כמקרה פרטי של עקרון כללי יותר.

1.23 פרמטרים. אם האיבר j או פונקצית המעבר g תלויים במשתנים שלא נזכרו כאן, שנקרא להם פרמטרים, אז גם הפונקציה h תלויה בהם. זה קורה לעתים רבות. למשל, החזקה w^n של מספר w מוגדרת ע"י $h(w,0) = 1$ ועבור $n > 0$ $h(w,n) = w \cdot h(w,n-1)$. כאן הפונקציה h המתקבלת היא פונקציה של שני משתנים $h(w,n)$ ופונקצית המעבר g נתונה ע"י $g(w,n,t) = w \cdot t$. עקרון ההגדרה ברקורסיה רגילה עם פרמטר הוא:

תהיינה W קבוצה, שנקרא לה תחום הפרמטר, תהי B קבוצה ותהיינה $j : W \to B$ ו- $g : W \times \omega \times B \to B$ פונקציות. אז קיימת פונקציה $h : W \times \omega \to B$ יחידה כך שלכל $w \in W$ ולכל $n > 0$ $h(w,0) = j(w)$ ו- $h(w,n) = g(w,n,h(n-1))$.

אנו נמשיך להתייחס ל-1.22 כאל הניסוח העיקרי של עקרון ההגדרה ברקורסיה כי ניסוח זה הוא פשוט יותר, והוספה של פרמטר, כפי שעשינו כאן, היא טריביאלית.

1.24 תרגיל. במקרים הבאים של הגדרה ברקורסיה רגילה על המספרים הטבעיים עם פרמטר הגדר במפורש את הפונקציות j ו-g.

א. הגדרת פעולת החיבור $m+n$ של המספרים הטבעיים כאשר נתונה פונקצית העוקב $s(x) = x+1$ והפרמטר הוא m.

ב. הגדרת פעולת הכפל $m \cdot n$ של המספרים הטבעיים באמצעות פעולת החיבור.

1.25. נדון עתה בשאלה האם ניתן להגדיר ברקורסיה פונקציה h על היצירה של איבר נוצר באלגברה $\mathcal{A}$. נבהיר תחילה למה אנו שואפים. אנו רוצים להגדיר פונקציה h שתחומה הוא קבוצת כל האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$. הרקורסיה בהגדרת h מתבטאת בכך שאנו קובעים שלכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ ולכל n איברים $a_1,\ldots,a_n$ שהם איברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$ אם $a=f(a_1,\ldots,a_n)$ אז הערך $h(a)$ מתקבל מן הערכים $h(a_1),\ldots,h(a_n)$ בדרך התלויה בפונקציה f. תלות זאת של $h(a)=h(f(a_1,\ldots,a_n))$ ב- $h(a_1),\ldots,h(a_n)$ נקבעת ע"י פונקצית מעבר מתאימה ל-f שאנו מסמנים אותה ב-g_f. לכן עקרון ההגדרה ברקורסיה על האיבר הנוצר ב-$\mathcal{A}$ הוא:

יהיו $\mathcal{A}$ אלגברה, G קבוצת האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ ו-B קבוצה (המיועדת להיות קבוצת המטרה). לכל $n\in\omega$ ולכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ תהי g_f פונקציה שתחומה מקיף את הקבוצה $G\times B^n$, כאשר B^n היא קבוצת כל ה-n-יות של איברי B. קיימת פונקציה יחידה $h:G\to B$ המקיימת

$$\text{לכל } n\in\omega\text{, לכל פעולה } n\text{-מקומית } f \text{ של } \mathcal{A} \text{ ולכל } a_1,\ldots,a_n\in G \qquad (2)$$
$$h(f(a_1,\ldots,a_n))=g_f(f(a_1,\ldots,a_n),h(a_1),\ldots,h(a_n))$$

נראה עתה כי בדרך כלל לא קיימת פונקציה h המקיימת את (2) והסיבה לכך היא פשוטה. יהי a איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$, $a=f(a_1,\ldots,a_n)$, כאשר f היא פעולה n-מקומית של $\mathcal{A}$ ו- $a_1,\ldots,a_n$ איברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$. אז לפי (2)

$$h(a)=g_f(a,h(a_1),\ldots,h(a_n)). \qquad (3)$$

כמו כן יתכן גם שעבור אותו a קיים $a=f'(a'_1,\ldots,a'_m)$, כאשר f' היא פעולה m-מקומית של $\mathcal{A}$ השונה מ-f ו- $a'_1,\ldots,a'_m$ איברים נוצרים ב $\mathcal{A}$ השונים מ- $a_1,\ldots,a_n$, ולכן לפי (2) $h(a)=g_{f'}(a,h(a'_1),\ldots,h(a'_n))$ וערך זה יכול בהחלט להיות שונה מן הערך ב-(3). בניסוח פשוט יותר, מכיוון שערך הפונקציה h עבור איבר נוצר a תלוי בדרך בו נוצר האיבר אז אם יש דרכים שונות ליצירת אותו האיבר אז עלולים להתקבל ערכים שונים לפונקציה h עבור האיבר a וזאת כמובן סתירה.

נתבונן בדוגמא הפשוטה הבאה. תהי $\mathcal{A}$ האלגברה של 1.7 בה יש קבוע יחיד 1 ושתי פעולות דו-מקומיות: חיבור וחיסור. ברור שהאיברים הנוצרים באלגברה זאת הם בדיוק כל המספרים השלמים. תהיינה הפונ-קציות g_f, עבור הפעולות f של $\mathcal{A}$, כדלקמן: $g_+(a,t_1,t_2)=1$, $g_-(a,t_1,t_2)=-1$ ו-$g_1(1)$ כלשהו. אילו היתה קיימת פונקציה h כמו ב-(2) אז מכיוון ש- $0=0+0$ קיים $h(0)=g_+(0,h(0),h(0))=1$, ומכיוון ש- $0=1-1$ קיים $h(0)=g_-(0,h(1),h(1))=-1$, וזאת כמובן סתירה.

1.25.1 תרגיל. מצא עוד מספר דוגמאות של אלגבראות $\mathcal{A}$ ופונקציות g_f לכל פעולה f של $\mathcal{A}$ כך שלא קיימת פונקציה h המוגדרת ברקורסיה ע"י (2).

כפי שראינו בברור הסיבה לכך שאי אפשר להגדיר ברקורסיה על האיבר הנוצר באלגברה היא שאותו עצם יכול להווצר ביותר מדרך אחת. למשל, בדוגמא שראינו היה קיים 0=0+0 וגם 0=1-1. לכן נטפל עתה במקרה בו אפשרות זאת אינה קיימת.

1.26 הגדרה. נקרא לאלגברה $\mathcal{A}$ אלגברת יצירה יחידה אם כל איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$ מתקבל באופן יחיד מאיברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$, כלומר לכל איבר a הנוצר ב-$\mathcal{A}$ אם $a=f_1(a_1,\ldots,a_n)=f_2(a'_1,\ldots,a'_m)$, כאשר f_1,f_2 פעולות של $\mathcal{A}$ ו- $a_1,\ldots,a_n,a'_1,\ldots,a'_m$ איברים נוצרים ב-$\mathcal{A}$, אז $m=n$ $f_1=f_2$ ו- $a_i=a'_i$ עבור $1\le i\le n$.

אם נרצה להבחין בין המקרה של הקבועים למקרים האחרים נאמר שלכל איבר a הנוצר ב-$\mathcal{A}$ קיים בדיוק אחד התנאים הבאים:

א. a הוא ערכו של קבוע יחיד של $\mathcal{A}$.

ב. $a=f(a_1,\ldots,a_n)$ עבור $n>0$ יחיד, פעולה n-מקומית f יחידה של $\mathcal{A}$ ואיברים נוצרים $a_1,\ldots,a_n$ יחידים.

בהנתן איבר a באלגברת יצירה יחידה $\mathcal{A}$ נקרא בשמות הפעולה היוצרת את a והיוצרים המיידיים של a, בהתאמה, לפעולה f של $\mathcal{A}$ ולאיברים הנוצרים $a_1,\ldots,a_n$ היחידים כך שקיים $a=f(a_1,\ldots,a_n)$.

1.26.1 דוגמא. תהי $\mathcal{A}$ האלגברה הבאה. A היא קבוצת כל הסדרות הסופיות של הספרות, כולל הסדרה הריקה שנסמנה ב-$\emptyset$. אנו מסמנים כל סדרה כזאת ע"י שאנו כותבים את איבריה ברצף כמו ב- 0432110. כמו כן, אם x היא סדרה כזאת ו-q היא ספרה אז אנו מסמנים ב-xq את הסדרה המתקבלת מ-x ע"י הוספת הספרה q בסופה. לאלגברה $\mathcal{A}$ יש קבוע Λ שערכו הוא $\emptyset$ ושתי פעולות חד-מקומיות s_0 ו-s_1 המוגדרות לכל סדרה x ע"י $s_0(x) = x0$ ו- $s_1(x) = x1$. כך $s_0(121) = 1210$ ו- $s_1(121) = 1211$. קל לראות כי האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ הם בדיוק הסדרות המכילות רק 0-ים ו-1-ים. ברור גם שזאת אלגברת יצירה יחידה כי לכל סדרה נוצרת x אם היא ריקה אז היא הערך של Λ ואינה הערך של s_0 או של s_1 עבור סדרה איזושהי, ואם אינה ריקה אז היא אינה הערך של Λ והיא בעלת בדיוק אחת משתי הצורות $y0$ ו-$y1$ עבור סדרה y יחידה שהיא הסדרה המתקבלת מ-x ע"י השמטת איברה האחרון ולכן קיימת עבורה בדיוק אחת משתי האפשרויות $x = s_0(y)$ ו- $x = s_1(y)$ עבור סדרה y יחידה.

1.27 משפט ההגדרה ברקורסיה על יצירת איבר באלגברת יצירה יחידה. יהיו $\mathcal{A}$ אלגברת יצירה יחידה, G קבוצת האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ ו-B קבוצה. לכל $n \in \omega$ ולכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ תהי g_f פונקציה שתחומה מקיף את הקבוצה $G \times B^n$, כאשר B^n היא קבוצת כל ה- n-יות של איברי B. קיימת פונקציה יחידה $h : G \to B$ המקיימת

$$\text{לכל } n \in \omega\text{, לכל פעולה } n\text{-מקומית } f \text{ של } \mathcal{A} \text{ ולכל } a_1, \ldots, a_n \in G \qquad (2)$$
$$h(f(a_1, \ldots, a_n)) = g_f(f(a_1, \ldots, a_n), h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

הערות א. אם אנו רוצים להפריד בסכימת הרקורסיה (2) בין המקרה של פעולות 0-מקומיות לבין המקרים של הפעולות האחרות נגביל את (2) למקרים בהם $n \geq 1$, ולמקרה $n = 0$ נניח שנתונה פונקציה j שתחומה מכיל את כל הקבועים של $\mathcal{A}$ וערכיה הם ב-B ונדרוש כתוספת לסכימת הרקורסיה כי לכל קבוע c של $\mathcal{A}$ $h(c) = j(c)$. (אם נרשום בדיוק את (2) למקרה $n = 0$ נקבל $h(c) = g_c(c)$.) פונקציה j זאת מגדירה במפורש את הערך של h לקבועים של האלגברה והיא מקבילה להגדרה המפורשת של $h(0)$ כ-j כאשר הגדרנו ב-1.22 את h ברקורסיה על המספרים הטבעיים.

ב. לעתים אנו רוצים להכניס במפורש לחישוב הערך של $h(a)$ לא רק את $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ עצמו ואת $h(a_1), \ldots, h(a_n)$ אלא גם את היוצרים המיידיים $a_1, \ldots, a_n$ של a, ואז נשתמש, במקום בפונקציה g_f, בפונקציה g'_f בעלת תחום מתאים וסכימת הרקורסיה תהיה

$$h(f(a_1, \ldots, a_n)) = g'_f(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n), h(a_1), \ldots, h(a_n)) \qquad (4)$$

סכימה (4) אינה כללית יותר מן הסכימה (2) כי גם לפי סכימה (2) ניתן להביא באגף ימין בחשבון את $a_1, \ldots, a_n$ כי מכיוון ש-$\mathcal{A}$ היא אלגברת יצירה יחידה ניתן לשחזר מ-$f(a_1, \ldots, a_n)$ את $a_1, \ldots, a_n$. באופן פורמלי, אם ברצוננו לקבל פונקציה h המקיימת את (4) נגדיר לכל פעולה f של $\mathcal{A}$ את g_f כדלקמן:

$$g_f(a, t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} g'_f(a_1, \ldots, a_n, a, t_1, \ldots, t_n) & \text{כאשר } a_1, \ldots, a_n \text{ הם איברי } A \text{ היחידים המקיימים } a = f(a_1, \ldots, a_n) \\ \text{איבר כלשהו של } B & \text{אם לא קיימים } a_1, \ldots, a_n \text{ כאלו} \end{cases}$$

ברור כי אם נציב את g_f כפי שהגדרנו אותו עתה בסכימה (2) נקבל את (4), ולכן קיום פונקציה h המקיימת את (4) נובע ממשפט ההגדרה ברקורסיה.

ג. הסכימה (2), כפי שהיא כתובה, אינה מכילה פרמטרים, אבל, בדיוק כפי שהזכרנו ב-1.23, הוספת פרמטרים אינה גורמת לכל קושי, ואנו נשתמש בהמשך בסכימות (2) ו-(4) גם עם פרמטרים.

הוכחה. תחילה נגדיר את h באופן לא פורמלי כדלקמן: עבור $a \in G$ יהי $h(a)$ הערך המתקבל מחישוב לפי (2). נראה עתה כיצד ניתן לחשב את $h(a)$ לפי (2). תחילה נתבונן במקרה הפשוט בו a הוא קבוע של $\mathcal{A}$. במקרה זה $n = 0$ ב-(2) ואנו מקבלים שם $h(a) = g_a(a)$. היות ו-g_a היא פונקציה נתונה החישוב שלנו הסתיים. כעת נעבור למקרה המסובך יותר בו a אינו קבוע ואז $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ כאשר $n \geq 1$, f היא הפעולה היוצרת את a, ו- $a_1, \ldots, a_n$ הם היוצרים המיידיים של a. כאשר אנו באים לחשב את $h(a)$ לפי (2) עלינו כבר לדעת את הערכים של $h(a_1), \ldots, h(a_n)$ ולכן, כדי לבצע את החישוב של $h(a)$, עלינו לחשב

תחילה ערכים אלו. עוד לפני שאנו מחשבים את הערכים של $h(a_1),\ldots,h(a_n)$ עלינו לדעת את ערכי h עבור היוצרים המיידיים של $a_1,\ldots,a_n$, וכן הלאה. לכן נקרא לקבוצה $E\subseteq G$ בשם קבוצת יצירה אם לכל איבר נוצר a, אם E מכילה את a אז E מכילה גם את כל יוצריו המיידיים. למשל, G עצמה היא קבוצת יצירה, וכל קבוצה של קבועים היא קבוצת יצירה. לפונקציה j לתוך B נקרא בשם חישוב אם התחום של j היא קבוצת יצירה ולכל מספר טבעי n ולכל פעולה n-מקומית f של $\mathcal{A}$ אם $f(a_1,\ldots,a_n)\in E$ אז (2) קיים ביחס ל-j, כלומר אם $a\in E$, f היא הפעולה היוצרת את a ו- $a_1,\ldots,a_n$ הם היוצרים המיידיים של a אז

$$.j(a)=g_f(a,j(a_1),\ldots,j(a_n)) \qquad (5)$$

(ל-j זאת אין שום קשר עם הפונקציה j של הערה א' לעיל). j נקראת בשם חישוב כי היא פועלת בדיוק כפי שחישוב של $h(a)$ עבור $a\in G$ אמור לפעול, כי הוא מחשב את $h(a)$ אחרי שערכי h עבור היוצרים המיידיים של a כבר חושבו. למשל, פונקציה h המקיימת את (2) היא חישוב. כמו כן, כל פונקציה שתחומה הוא קבוצה של קבועים והנותנת לכל קבוע c את הערך $g_c(c)$ גם היא חישוב.

דוגמא. נחזור לדוגמא של 1.26.1. תהי E הקבוצה $\{\emptyset,0,1,00,01,001\}$. E היא קבוצת יצירה כי יחד עם כל סדרה היא מכילה את היוצר המיידי שלה. (היות וב-$\mathcal{A}$ יש רק פעולות 0- ו-1-מקומיות יש לכל איבר נוצר לכל היותר יוצר מיידי אחד). נקבע את פונקציות המעבר $g_\Lambda,g_{s_0},g_{s_1}$ לתוך קבוצת המספרים הטבעיים ע"י $g_\Lambda(\Lambda)=0$, $g_{s_0}(a,t)=2t$ ו- $g_{s_1}(a,t)=2t+1$. נבנה עתה חישוב j שתחומו E. כדי ש-(5) יתקיים ביחס ל-$\emptyset$ עלינו לקבוע $j(\emptyset)=j(\Lambda)=g_\Lambda(\Lambda)=0$. כדי ש-(5) יתקיים ביחס לסדרה $x0=s_0(x)$ עלינו לקבוע $j(x0)=g_{s_0}(x0,j(x))=2j(x)$, וכדי ש-(5) יתקיים ביחס ל- $x1=s_1(x)$ עלינו לקבוע $j(x1)=g_{s_1}(x1,j(x))=2j(x)+1$. לכן נקבע $j(\emptyset)=0$, $j(0)=2j(\emptyset)=2\cdot 0=0$, $j(1)=2j(\emptyset)+1=2\cdot 0+1=1$, $j(00)=2j(0)=2\cdot 0=0$, $j(01)=2j(0)+1=2\cdot 0+1=1$, $j(001)=2j(00)+1=2\cdot 0+1=1$. כך הגדרנו את j כדי ש-(5) תתקיים לכל סדרה x ב-E ולכן j היא חישוב.

שאלה ראשונה ביחס לחישובים היא אם שני חישובים שונים יכולים לתת ערכים שונים לאיבר של G, ועל שאלה זאת עונה הלמה הבאה.

1.28 למה. כל שני חישובים הם מתיישבים, כלומר אם j_1,j_2 חישובים ו-a נמצא בתחומים של שניהם אז $.j_1(a)=j_2(a)$

הוכחה. נוכיח זאת באינדוקציה על העצם הנוצר a. יהי a איבר הנמצא בשני התחומים של j_1 ו-j_2. תהי f הפעולה היוצרת את a ויהיו $a_1,\ldots,a_n$ היוצרים המיידיים של a. היות והתחומים של j_1 ו-j_2 הם קבוצות יצירה גם $a_1,\ldots,a_n$ נמצאים בהם, וקיים

$$j_1(a)=g_f(a,j_1(a_1),\ldots,j_1(a_n)) \qquad j_2(a)=g_f(a,j_2(a_1),\ldots,j_2(a_n)) \qquad (6)$$

לפי הנחת האינדוקציה קיים לכל $1\leq i\leq n$ $j_1(a_i)=j_2(a_i)$. לכן נובע מ-(6) כי $j_1(a)=j_2(a)$, ובזה הסתיימה הוכחת הלמה.

למה 1.28 מוכיחה את יחידות הפונקציה h המוגדרת ברקורסיה, כי כל פונקציה כזאת היא חישוב שתחומו G ולפי הלמה כל שני חישובים כאלו הם מתיישבים, ומכיוון שהם בעלי אותו תחום G הם שווים.

1.29 למה. אם $j_1,\ldots,j_n$ חישובים שתחומיהם $Z_1,\ldots,Z_n$, בהתאמה, אז גם $j=\bigcup_{1\leq i\leq n}j_i$ הוא חישוב שתחומו הוא $.Z=\bigcup_{1\leq i\leq n}Z_i$

הוכחה. לפי 1.28 כל שנים מבין ה-j_i-ים מתיישבים ולכן איחודם j הוא פונקציה שהתחום שלה הוא Z (כי האחוד של קבוצת פונקציות אשר כל שתים מהן מתיישבות הוא פונקציה). Z היא קבוצת יצירה, כי אם $a\in Z$ אז לפי הגדרת Z קיים $1\leq i\leq n$ כך ש- $a\in Z_i$. היות ו-Z_i היא קבוצת יצירה גם כל היוצרים המיידיים של a נמצאים ב-Z_i, ולכן כולם גם נמצאים ב-Z. נותר לנו להראות כי j מקיימת את (5). בהנתן $a\in Z$ יהי $a\in Z_i$. אז גם היוצרים המיידיים $a_1,\ldots,a_n$ של a הם ב-Z_i. לכן, מכיוון ש-j_i, בהיותה

חישוב, מקיימת את (5) ומכיוון ש- $j_i \subseteq j$ קיים

$$j(a) = j_i(a) = g_f(a, j_i(a_1), \ldots, j_i(a_n)) = g_f(a, j(a_1), \ldots, j(a_n)),$$,

כאשר f היא הפעולה היוצרת את a.

1.30 למה. לכל $a \in G$ קיים חישוב j שתחומו מכיל את a.

הוכחה. נוכיח זאת באינדוקציה על העצם הנוצר a. תהי f הפונקציה היוצרת את a ויהיו $a_1, \ldots, a_n$ היוצרים המיידיים של a. לפי הנחת האינדוקציה קיימים חישובים $j_1, \ldots, j_n$ כך שלכל $1 \le i \le n$ j_i הוא חישוב שתחומו מכיל את a_i. לפי 1.29 $j = \bigcup_{1 \le i \le n} j_i$ הוא חישוב שתחומו Z מכיל את $a_1, \ldots, a_n$. אם $a \in Z$ אז גמרנו. אם $a \notin Z$ אז נגדיר פונקציה j' על $Z \cup \{a\}$ על ידי $j' = j \cup \{\langle a, g_f(a, j(a_1), \ldots, j(a_n))\rangle\}$ (כלומר, עבור $b \in Z$ $j'(b) = j(b)$ ו- $j'(a) = g_f(a, j(a_1), \ldots, j(a_n))$). $Z \cup \{a\}$ הוא קבוצת יצירה כי אם $b \in Z$ אז מכיוון ש-Z היא קבוצת יצירה אז גם כל היוצרים המיידיים של b נמצאים ב-Z, ואם $b = a$ אז היוצרים המיידיים של b הם $a_1, \ldots, a_n$ והם איברי Z, לפי הגדרת Z. לבסוף נוכיח כי אם $b \in Z \cup \{a\}$ אז הפעולה היוצרת אותו היא f' ויוצריו המיידיים הם $d_1, \ldots, d_m$ אז j' מקיים את (5), כלומר

$$j'(b) = g_{f'}(b, j'(d_1), \ldots, j'(d_m)).$$

אם $b \in Z$ אז גם $d_1, \ldots, d_m \in Z$ והיות ו-j חישוב שתחומו Z קיים

$$j'(b) = j(b) = g_{f'}(b, j(d_1), \ldots, j(d_m)) = g_{f'}(b, j'(d_1), \ldots, j'(d_m))$$.

אם $b = a$ אז $m = n$, $f' = f$ ו-$d_i = a_i$ עבור $1 \le i \le n$, וקיים לפי הגדרת j'

$$j'(a) = g_f(a, j(a_1), \ldots, j(a_n)) = g_{f'}(a, j'(a_1), \ldots, j'(a_n)).$$.

המשך הוכחת 1.27. נגדיר כעת את h כפונקציה שתחומה הוא G והנותנת לכל $a \in G$ את הערך הניתן לו ע"י חישוב כלשהו j שתחומו מכיל את a, כלומר $h(a) = j(a)$. ערך זה הוא יחיד, לפי 1.28, והוא מוגדר לכל $a \in G$, לפי 1.30. נותר לנו להוכיח כי h מקיימת את (2). יהי $a \in G$, תהי f הפעולה היוצרת את a ויהיו $a_1, \ldots, a_n$ היוצרים המיידיים של a. יהי j חישוב שתחומו מכיל את a, אז היות ותחום j הוא קבוצת יצירה הוא מכיל גם את $a_1, \ldots, a_n$, ולפי הגדרת h קיים $h(a) = j(a)$ וגם $h(a_i) = j(a_i)$ עבור $1 \le i \le n$. לכן, מכיוון ש-j היא חישוב, קיים לפי (5)

$$h(a) = j(a) = g_f(a, j(a_1), \ldots, j(a_n)) = g_f(a, h(a_1), \ldots, h(a_n))$$.

1.31 תרגיל הוכחה. בדומה ל-1.15 הראה שעקרון ההגדרה ברקורסיה רגילה למספרים הטבעיים הוא מקרה פרטי של עקרון ההגדרה ברקורסיה על איברים נוצרים באלגברת יצירה יחידה.

1.32 הגדרה. בהנתן אלגבראות $\mathcal{A} = \langle A, W\rangle$ ו- $\mathcal{B} = \langle B, U\rangle$ אנו אומרים ש-$\mathcal{B}$ הוא צימצום של $\mathcal{A}$ אם העולם של $\mathcal{B}$ שווה לעולם של $\mathcal{A}$, כלומר $B = A$ וכל הפעולות של $\mathcal{B}$ הן פעולות של $\mathcal{A}$, כלומר $U \subseteq W$. למשל, האלגברה של קבוצת המספרים הממשיים עם פעולות החיבור והחיסור היא צימצום של אלגברת המספרים הממשיים עם ארבע פעולות החשבון.

1.33 תרגיל הוכחה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ו-$\mathcal{B}$ צימצום של $\mathcal{A}$.

א. כל עצם נוצר ב-$\mathcal{B}$ הוא גם נוצר ב-$\mathcal{A}$. (הוכח זאת באינדוקציה על העצם הנוצר ב-$\mathcal{B}$).

ב. אם $\mathcal{A}$ אלגברת יצירה יחידה אז גם $\mathcal{B}$ כן.

1.34 תרגיל. אם $\mathcal{A}$ היא אלגברה כך שקיימת עבורה הגדרה ברקורסיה על האיברים הנוצרים ב-$\mathcal{A}$ כמנוסח ב-1.27 אז $\mathcal{A}$ היא אלגברת יצירה יחידה. בניסוח מדוייק יותר, אם $\mathcal{A}$ היא אלגברה כך שלכל בחירה של קבוצת מטרה B ושל פונקציות מעבר g_f כמו ב-1.27 קיימת פונקציה h כנזכר שם אז $\mathcal{A}$ היא אלגברת יצירה יחידה. (רמז להוכחה: הערה ב' המופיעה אחרי ניסוח משפט 1.27 מצביעה על כוון המחשבה).

1.35 תרגיל הוכחה. תהי $\mathcal{A}$ אלגברת יצירה יחידה ויהי a איבר נוצר ב-$\mathcal{A}$. נאמר, באופן לא פורמלי, שאיבר $b \in A$ קודם ל-a אם b משתתף בהכרת בתהליך היצירה של a. אנו מבינים כאן את המונח "קודם" במובן של "קודם או שווה" כך שגם a עצמו נחשב לקודם ל-a. עתה נגדיר במדוייק את הקבוצה $K(a)$ שהיא קבוצת איברי A הקודמים ל-a. קבוצה זאת מוגדרת ברקורסיה על יצירת האיברים ב-$\mathcal{A}$ ע"י: $K(f(a_1, \ldots, a_n)) = \{f(a_1, \ldots, a_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} K(a_i)$, ובעברית: הקודמים לאיבר נוצר ב-$\mathcal{A}$ הם האיבר עצמו וכל הקודמים ליוצריו המיידיים. ברור שאם c הוא קבוע של $\mathcal{A}$ אז $K(c) = \{c\}$. למשל, באלגברת היצירה היחידה $\mathcal{A}$ של דוגמא 1.26.1 האיברים הקודמים ל-001 הם $\emptyset, 0, 00, 001$.

א. איזו פונקציה עלינו לבחור עבור g_f בסכימת הרקורסיה (2) כדי לקבל את ההגדרה של K?

ב. כל סדרת יצירה של איבר a מכילה כל איבר קודם ל-a. נהוכח באינדוקציה על יצירת a ב-$\mathcal{A}$, תוך שימוש ב-1.8.2.]

ג. לכל איבר a הנוצר ב-$\mathcal{A}$ קיימת סדרת יצירה שכל איבריה קודמים ל-a.

ד. אם b קודם ל-a ו-c קודם ל-b אז c קודם ל-a.

1.36 תרגיל. הראה דוגמה של אלגברת יצירה $\mathcal{A}$, איבר a נוצר ב-$\mathcal{A}$ וסדרת יצירה ל-a המכילה איברים שאינם קודמים ל-a.